点集拓扑学原理

王成堂
戴锦生
王尚志

陕西科学技术出版社

点集拓扑学原理

王成堂　藏锦生　王尚志

陕西科学技术出版社

点集拓扑学原理
王成堂　戴锦生　王尚志
陕西科学技术出版社出版
(西安北大街131号)
陕西省新华书店发行　　小寨印刷厂印刷
开本850×1168　1/32　　印张6.75　字数140,000
1985年8月第1版　　1985年8月第1次印刷
印数1－6,000
统一书号：7202·89　　定价：1.55元

序

点集拓扑学是拓扑学的一个分支，形成于本世纪初。由于分析理论的深入发展，人们产生了抽象和推广极限与连续性理论的要求，*Cantor* 创立的集合论为此提供了有力的工具，*M*. *Frechet*、*F*. *Hausdorff*、*F*. *Riesz* 等著名的数学家利用公理化的方法，分别从不同的角度建立了抽象空间的理论，从而形成了点集拓扑学。具有高度概括性的拓扑学是现代数学的基础之一，它的结果已经为许多数学分支所利用。掌握点集拓扑学的基本理论，对于从事数学各学科的研究是必不可少的；对于从事数学教学的教师来说，了解点集拓扑学的观点和方法也同样是十分重要的。

我国第一本专门论述点集拓扑学的著作是关肇直先生1956年编写的"拓扑空概论"，1978年初关先生来信希望我们协助他改写此书，或另外新编一本能适应现代数学发展的书。我们未能在关先生生前完成此嘱，对此我们深感内疚。我校杨永芳教授自40年代起就从事点集拓扑的研究与教学，他生前为出版一本适合我国实际情况的教材做了大量的工作，但终因过早谢世而未能如愿。十年动乱以后，我们重新开设了这个课程并编写了一个讲义。这本讲义在校内外先后使用过五期。听取了多方面的宝贵意见，我们曾做了两次较大的修改，成为现在这个样子。

这本书我们是把它做为大学必修课的教材来编写的，本着

少而精的原则进行了选材，希望它既包括点集拓扑学最基本的结果，又能适当反映现代点集拓扑学的发展，此外还考虑到适应我国目前的教学实际。例如，做为准备知识，我们较多地介绍了朴素集论的内容和方法；根据近年来点集拓扑学的发展，适当地选择了拓扑空间势函数的一些结果，等等。当然，点集拓扑学中还有许多重要课题，例如，仿紧性、紧化、一致空间、维度理论等在这本书中我们未能涉及，我们把它们放在另一本为选修课编写的教材中。我们遵循的第二个原则是：内容的叙述要自然，尽力使点集拓扑学的高度抽象的观点与方法变得直观易懂，例如在介绍拓扑空间定义之前，用了一节来介绍欧几里得空间，这不仅仅是因为欧几里得空间是拓扑空间概念的发源地，而更重要的是为读者在头脑中建立一个拓扑空间概念的直观模型，拓扑空间的许多概念都可从这个模型中找到产生它们的直观背景，很多著名的反例都是在欧几里得空间基础上改造而成的。另外，在书中我们选用了大量的例子和反例，我们感到搞清楚这些例子和反例不仅是加深理解抽象概念的重要途径之一，而且会使纯理论的学习变得生动活泼。

书中有部分结果的证明是留待读者完成的，每一章后面都附有数量不多的练习题，较困难的习题注有“*”号，这些习题经过一定努力都是可以完成的，读者务必动手做一下。

本书在编写过程中，承蒙江泽涵先生，关肇直先生的鼓励和关心，得到西北大学数学系以及许多同志的支持和帮助，谨此致谢。

书中，难免有许多不足之处，尚祈读者不吝指教。

1983.7

于西安

目　　录

第一章　集论初步

第二章　拓扑空间

第三章　积空间、商空间

第四章　紧　　性

第五章　度量空间、度量化

第一章 集论初步

集合论是近代数学的基础，它与一般拓扑学关系极为密切。在一般拓扑学创建阶段，集合论和拓扑学几乎是不加区分的。在一般拓扑学的整个发展中，始终保持了与集合论的密切联系。本章介绍朴素集合论的某些主要结果和思想方法，掌握这些知识和方法是学习一般拓扑学必不可少的，对近代数学其它分支的学习也大有裨益。

§1 集合的概念

“集合”二字在数学中作为一个最基本的数学概念，难以再用其它数学概念来定义，姑且就当作“总体”去理解。每当我们把一些事物作为一个总体来考虑时，这个总体就称作一个集合。数学中经常涉及各种各样的集合，例如：具有某种性质的数的集合；具有某种性质的图形的集合；满足一定条件的函数的集合；某些集合的集合；……。集合也简称集。组成集合的事物则叫作集合的元素，或叫元、点。当 x 是集 A 的元时，表示作 $x\in A$，否则表示作 $x\notin A$，对于给定的 A 与给定的 x 来说，x 是否是 A 的元应该是确定的，即是说，或者有 $x\in A$，否则有 $x\in A$，二式之中必有且仅有一式成立。自然地，当集 A 与集 B 所含元素相同时，我们应该认为 A 与 B 是同一个集合，记作 $A=B$。随着集合所含元素是有限多个或非有限多个，我们分

别称作有限集或无限集。

给定一个集，就是给定它所含的元素。特殊情形下，我们可以采用罗列出它的全部元素的办法。例如10以内素数的集合可以表示作$\{2, 3, 5, 7\}$；代数方程$x^2-3x+2=0$的根的集合就是$\{1, 2\}$。但这种办法并非总是可行的。一般情况下，用$\{x: \varphi(x)\}$的形式来给定一个集合，其中φ是确定的条件（性质），$\varphi(x)$表示x满足条件φ，$\{x: \varphi(x)\}$就表示满足条件φ的所有事物组成的集合。例如10以内素数的集合就是$\{x: x$是素数并且$x<10\}$，代数方程$x^2-3x+2=0$根的集合就是$\{x: x^2-3x+2=0\}$。又如$\{n: n$是自然数$\}$就是自然数集合，$\{f: f$是以$[a, b]$为定义域的实值函数$\}$就是所有定义在闭区间$[a, b]$上的实值函数组成的集合。我们特别把不含任何元素的集合记作$\varnothing$，叫空集。

关于集合这个概念，我们此处所介绍的这种直观而朴素的解释，来自集合论的创始人、德国数学家*G·Cantor*（1845—1918）。应该指明，这种解释本身已经隐含了逻辑上的弊病，通常叫作“悖论”。

下面介绍的是著名的罗素悖论（*Russell's Paradox*）：

设S表示不以自身为元素的集合的总体，即$S=\{x: x\overline{\in}x\}$，依照*Cantor*的说法，$S$是一个集。我们自然会提出一个问题：$S$这个集合是否属于$S$呢？结果我们将看到，无论答案是什么都免不了出现矛盾。首先，设$S\in S$，由于S不满足集合$S=\{x: x\overline{\in}x\}$的条件$\varphi$，推出$S\overline{\in}S$，与所设矛盾；其次，设$S\overline{\in}S$，于是$S$满足条件$\varphi$，推出$S\in S$，仍然与所设矛盾。

为了避免这种逻辑上的弊病，我们附加上一条规定：集合不得以自身为元素。

有了这条规定，一切集合的总体就不再是集合了。从而$\{x : x\in x\}$也不再是集合了。

罗素悖论的发现在历史上曾一度给集合论的发展带来过危机。二十世纪以来，公理集合论的建立克服了朴素集论的不足。但是对于我们的课程来说，目前所必需的只是朴素集论的初步知识和方法。

§2　子集、集的运算

定义1　如果集A的元素都是集B的元素，则称A是B的子集，记作$A\supset B$（或$A\subseteq B$），读“A包含于B”，$A\subset B$也可以表示为$B\supset A$（或$B\supseteq A$），读“B包含A”。

特别，当$A\subset B$同时$A\neq B$时，称A是B的真子集。

容易看出$A\subset B$同时$A\supset B$就等价于$A=B$。这一简单的事实今后在判定两个集合是否相等时会经常用到。此外，空集$\varnothing$应该是每一个集合的子集，每一个集合以自身为子集。

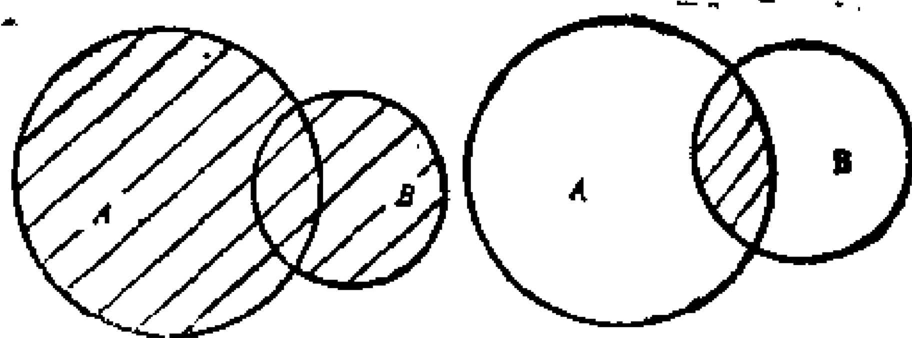
定义2　设A、B是两个集合，我们把由A中一切元素与B中一切元素组成的集合叫作A与B的并，记为$A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x : x\in A\text{或}x\in B\}.$$

我们把A与B公有的元素组成的集合叫作A与B的交，记为$A\cap B$。即

$$A\cap B=\{x : x\in A\text{同时}x\in B\}.$$

两个集合的并与交可以用图来示意（图中有斜线部分各自表示$A\cup B$与$A\cap B$）。



显然，并与交这两种运算满足交换律、结合律以及分配律：

交换律　$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

一般情形下，设有一族集合$\{A_i: i\in I\}$，其中I可以是有限集也可以是无限集。我们把集合

$$\cup\{A_i: i\in I\}=\{x: \exists i\in I, x\in A_i\}$$

叫作集族$\{A_i: i\in I\}$的并。

把集合

$$\cap\{A_i: i\in I\}=\{x: \forall i\in I, x\in A_i\}$$

叫作集族$\{A_i: i\in I\}$的交。

例如

$$A_n=\{x: x\text{是实数，并且}|x|<\frac{1}{n}\}$$

于是

$\cap\{A_n: n\in N\}=\{0\}$　其中N代表自然数集合。

$B_n=\{x: x\text{是实数，并且}0<x<\frac{1}{n}\}$

于是

$$\bigcap\{B_n : n\in N\}=\varnothing \quad \text{或写作} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\varnothing.$$

若$\{n\}$是自然数n组成的单元素集合，于是

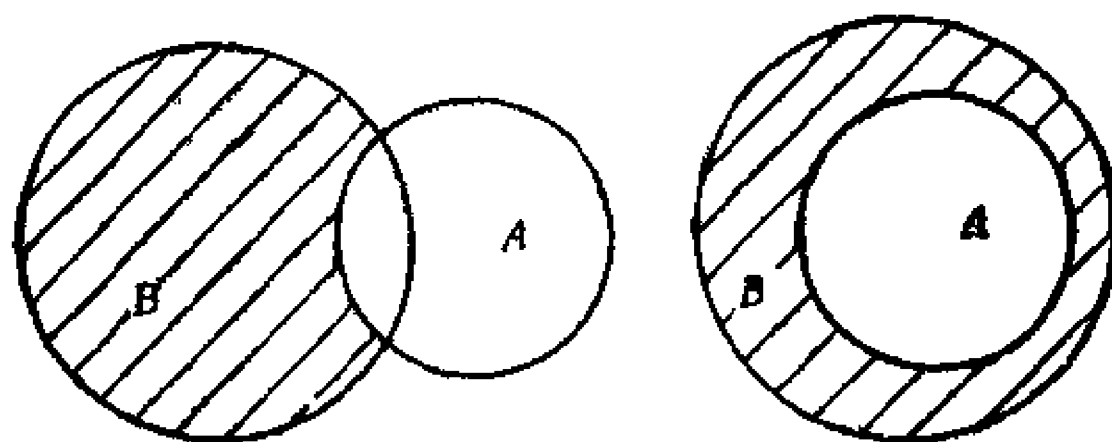
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}=N.$$

定义3 设A、B是两个集合，我们把属于B而不属于A的元素组成的集合叫作B与A的差，记为$B-A$（或$B\setminus A$）即

$$B-A=\{x: x\in B \text{同时} x\overline{\in} A\}.$$

特别，当A是B的子集时，$B-A$叫做A（在B中）的余集。

差与余集可以图示如下



容易看出，$B-A=B-(A\cap B)$。此外，当A是X的子集时，A的余集是$X-A$，同时$X-A$的余集是A。

更重要的有如下运算法则：

De Morgan 公式

$$X-\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(X-A_i).$$

$$X-\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(X-A_i),$$

其中I可以是有限集也可以是无限集。这两个式子是我们

以后经常要用的。它们可以简述为交的差等于差的并；并的差等于差的交。现在仅以第二式为例，证明如下：

因为 $x\in X-\bigcup\limits_{i\in I}A_i \Longleftrightarrow x\in X$ 同时 $x\notin \bigcup\limits_{i\in I}A_i$ 即 $x\in X$ 同时 $x\notin$ 每一个 A_i，$i\in I$。

注意到 $x\in X$ 同时 $x\notin A_i$ 就是 $x\in X-A_i$ 的意思。因此 $x\in X-\bigcup\limits_{i\in I}A_i \Longleftrightarrow x\in$ 每一个 $(X-A_i)$，$i\in I$。即 $x\in\bigcap\limits_{i\in I}(X-A_i)$。第二式得证。

最后，我们讨论一下单调的集序列。集序列

$$M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n,\ \cdots\cdots$$

叫递减的（严格递减的），是指对一切自然数 n，恒有 $M_n\supset M_{n+1}$（$M_n\supsetneqq M_{n+1}$）成立；叫递增的（严格递增的），是指对一切自然数 n，恒有 $M_n\subset M_{n+1}$（$M_n\subsetneqq M_{n+1}$）成立。

对于递减的集序列 $\{M_n: n=1,2\cdots\cdots\}$ 来说，若 $\{M_{n_i}: i=1,2\cdots\cdots\}$ 是其任意一个无限子列，则有

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}M_{n_i}=\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n$$

而对于递增的集序列来说，则有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}M_{n_i}=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n.$$

证明留给读者自行练习。

§3 势、可数势

在有限集的场合，以一一对应为基础，建立了“个数相等”的概念。*Cantor* 的功绩之一就在于他坚持了一一对应这

个原则，使"个数相等"的概念合理地推广到无限集的场合。为了真正了解这种推广的思想脉络，我们不妨先回到有限集的场合。设A与B是两个有限集，"比较A与B所含元素的多少"是什么意思呢？就是从一一对应的角度来看A与B的关系。当A与B可以一一对应时，就说A与B所含元素个数相等，否则就是不相等。在不相等的情况下，若A与B的某个真子集B'可以一一对应，就说A的元素少而B的元素多。形象地说，在有限集中部分少于整体。注意到偶数集$\{2, 4, 6, \cdots 2n, \cdots\}$虽然是自然数集$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\cdots\}$的真子集，但二者之间却可以建立一一对应。显然"部分少于整体"对无限集来说是失效的。

定义 4 如果集合A与B之间存在一一对应，则称A与B对等。凡是对等的集合，我们称它们具有相同的势或说A与B的基数相同。集A的势记作$|A|$，于是A与B对等就表示为$|A|=|B|$。

空集的势用0来表示。即 $|\phi|=0$。

n（自然数）个元素组成的集合的势就用n来表示。

自然数集N的势用$S\diagdown S$表示（$S\diagdown S$是希伯莱文第一个字母，读$Alef$）。凡是势为$S\diagdown S$的集合都叫可数无限集。例如

自然数集$N=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\cdots\}$

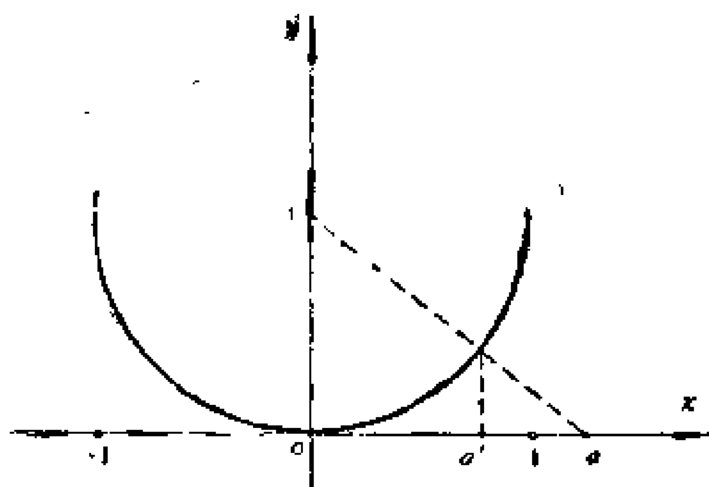
奇数集$\{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots\cdots\}$

完全平方数集$\{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\cdots\}$

素数集$\{2, 3, 5, \cdots p_n, \cdots\cdots\}$

等，都是可数无限集。

实数集合$(-\infty, +\infty)$与它的一个真子集$(-1, +1)$是对等的，其一一对应可以图示如下：



其中（$-\infty$，$+\infty$）中的点a对应$a'\in$（-1，$+1$）。

我们自然还可以取$f(x)=\frac{2}{\pi}arc\ tgx$，$x\in(-\infty, +\infty)$，或$g(x)=\frac{x}{1+|x|}$，$x\in(-\infty, +\infty)$等种种不同的一一对应。

我们以后把有限集与可数无限集统称作可数集。不久我们就会知道，实数集是非可数的。下面对可数集进行详细的讨论。

由于任何一个可数无限集合A与自然数集N是可以一一对应的，于是借助随意一个一一对应$f: N\longrightarrow A$，就可以把A中元素排成一个无限序列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

所以今后谈到可数无限集时，我们不妨就直接给成序列$\{a_n:$ $n=1, 2, \cdots\cdots\}$的形式。

定理1.1 可数集的子集是可数集。

证明 当可数集是有限集时，结论是显然的。以下我们仅就A是可数无限集

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots \qquad (1)$$

的情形证明A的子集或是有限集，否则就是可数无限集。

设$A'\subset A$，而且a_{n_1}是（1）中第一个属于A'的元素，a_{n_2}

是第二个属于A'的元素，等等。仅有两种可能：其一，有限个a_{nk}之后（1）中不再有属于A'的元素，否则将存在由A'的元素组成的无限序列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{nk}, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

此时A'是可数无限集。

〔证完〕

上述证明还可以不失一般性地仅就自然数集N的子集N'来证明。当N'有最大元时，N'是有限集，否则N'是N的无限子序列，从而是可数无限集。

定理1.2 可数个可数集的并是可数集。

证明 这里仅就A_1，A_2，…，A_n，……是可数无限多个互不相交的可数无限集合的情形，证明$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$是可数无限集。无妨认为$A_n$各自已经排为序列形式

$$A_1 = \{ a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots\cdots \}$$

$$A_2 = \{ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots\cdots \}$$

……

$$A_m = \{ a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, \cdots\cdots \}$$

……

我们把a_{mn}的两个标号m、n之和$m+n$叫作a_{mn}的高。按下述方法对$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$中的元素加以排列：高不相同时，高小者排在前；高相同时，第一个标号小者排在前（这种排列方法可以形象的叫作“对角线方法”）。即

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\cdots$$

于是A的全部元素排成了无限序列，所以A是可数无限集。

当诸A_n间有相同的元素时，可以先去掉重复出现的元素，

按照新的集合

$$A_1,\ A_2-A_1, A_3-(A_1\cup A_2),\ \cdots,\ A_n-(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i),\ \cdots\cdots$$

进行排列。此时新的集序列与原有的集序列

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots\cdots$$

有同一的并。

〔证完〕

定理1.3 每一个无限集M必包含一个可数无限子集A(可以要求A是真子集，甚至要求余集$M-A$仍是无限集）。

证明 因为M是无限集，所以M中至少有一个元素a_1，并且$M-\{a_1\}$仍是无限集，于是又有$a_2\in M-\{a_1\}$使得$M-\{a_1,\ a_2\}$是无限集，一般来说，若已取得M中的元素a_1，a_2，$\cdots$，a_n，此时由于$M-\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$是无限集，所以又有$a_{n+1}\in M-\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$，如此步骤可以一直继续下去，说明存在无限序列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

其中a_n是M中的、彼此互不相同的元素。

若令

$$A=\{a_n:n\geqslant 2\}$$

显然A是M的可数无限子集，并且是真子集。

若令

$$A=\{a_{2n}:n\text{是自然数}\}$$

那么A不但是M的可数无限真子集，并且满足$M-A$是无限集的要求。

〔证完〕

定理1.4 设M是非可数集，A是M的可数子集，则M与$M-A$对等。

证明 首先知道$M-A$是非可数集（否则将由$M-A$以及A的可数性推出M是可数集），依据定理1.3，存在可数无限集$B\subset M-A$，于是

$$M=A\cup B\cup[M-(A\cup B)],$$

$$M-A=B\cup[M-(A\cup B)].$$

因为$A\cup B$与B都是可数无限集，存在一一对应$f: A\cup B\longrightarrow B$。

令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当}x\in A\cup B\text{时}, \\ x, & \text{当}x\in M-(A\cup B)\text{时}, \end{cases}$$

如此定义的F就是M与$M-A$间的一一对应。因此M与$M-A$对等。

〔证完〕

综合定理1.3与定理1.4，我们就得出一个结论：任何无限集必与其自身某个真子集对等。这一特征正是无限集区别于有限集的本质。

利用前面一系列的定理，我们不难得出下列结果：

（1）所有自然数对的集合$\{(m, n): m, n\in N\}$是可数集。

（2）有理数集是可数集。

（3）n维欧氏空间中一切有理点之集是可数集。

（4）有理系数的多项式之集是可数集。

（5）代数数集合是可数集。

§4 势的比较

由前一节的讨论我们已经知道，势的概念是有限集元素数

量概念的扩充。数量的基本性质之一是可以比较大小，两个数量，要么相等，要么一个大于另一个。因此，我们很自然地会想到势的比较问题。

设A与B是给定的两个集合，从逻辑上讲，只有下列四种情形：

（1）A与B的某个子集B'对等，但B不与A的任何子集对等；

（2）B与A的某个子集A'对等，但A不与B的任何子集对等；

（3）A与B的某个子集B'对等，同时B与A的某个子集A'对等；

（4）A不与B的任何子集对等，同时B不与A的任何子集对等。

在（1）的情形下，我们称A的势小于B的势。表示为$|A|<|B|$。自然在情形（2）就应是$|B|<|A|$。在情形（3），我们将证明$|A|=|B|$。对于情形（4）的讨论，我们遗留在选择公理之后进行，那时将指出情形（4）事实上是不可能出现的，从而知道势是可以比较的，换言之，两个集合要么势相等，要么一个的势比另一个大。

定理1.5 （*Bernstein*）设A与B的某个子集B'对等，同时B与A的某个子集A'对等，则A与B对等。

证明 因为当$B'=B$（或$A'=A$）时，定理结论显然成立，所以我们无妨限定B'、A'都是真子集。设

$$f_1: A \longrightarrow B' \subsetneqq B$$

$$f_2: B \longrightarrow A' \subsetneqq A$$

都是一对一的。于是

$$f_2\circ f_1: A\longrightarrow A_1=f_2\circ f_1[A]\subset A'$$

是一对一的。

现在问题已归结为：已知$A\supset A'\supset A_1$，在A与A_1间有一一对应f，欲证存在A到A'上的一一对应。

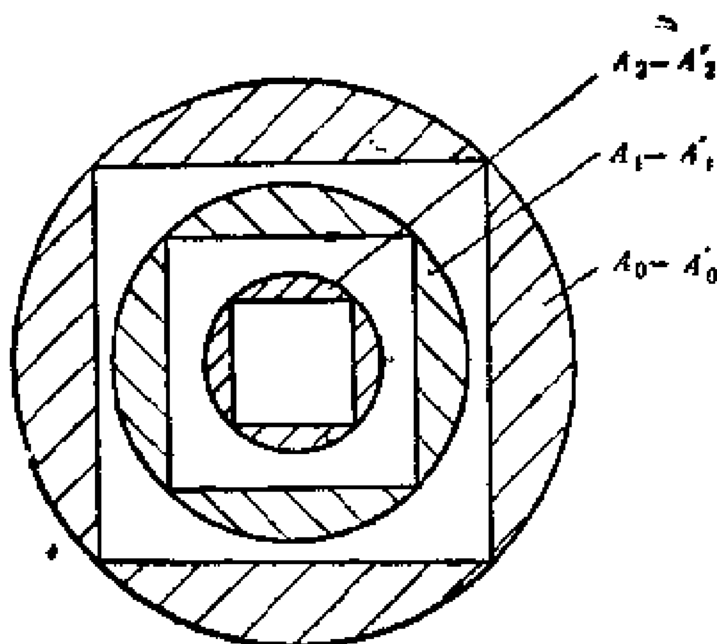
为了叙述方便起见，我们把A、A'分别记作A_0与A'_0，并依次令

$$A_{n+1}=f[A_n],\ A'_{n+1}=f[A'_n],\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

定义

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当}x\in A_n-A'_n\text{时},\ n=0,\ 1,2,\ \cdots\cdots \\ x, & \text{其它}x。\end{cases}$$

由于g把$A_0-A'_0$，$A_1-A'_1$，$A_2-A'_2$，……依次一对一地映成了$A_1-A'_1$，$A_2-A'_2$，$A_3-A'_3$……，而在其它点$g(x)=x$，所以g就是A_0与A'_0间的一一对应。示意图如下：



*Bernstein*定理即是说由$|A|\leqslant|B|$和$|A|\geqslant|B|$推出$|A|=|B|$。

上面我们对势的比较问题已经作了一些讨论，要使得这番

讨论确有意义，应该证实不同的无限势是存在的。下面的定理不但告诉我们不同的无限势是存在的，而且告诉我们，对任意一个集合X，都有势$>|X|$的集合，即存在任意大的势。

定理1.6 设X是任意一个集合，则$|p(X)|>|X|$，其中$p(X)$是X的所有子集组成的集合。

证明 由于单元素集合$\{x\}$，$x\in X$，都是$p(X)$的元素，所以$|X|\leqslant|p(X)|$，为了证明$|X|\neq|p(X)|$，我们采用反证法。

假设$|X|=|p(X)|$，f是X与$p(X)$间的一一对应。令

$M=\{x\in X:x\overline{\in}f(x)\}$。

自然M应该是某个$x^{*}\in X$的像，即$f(x^{*})=M$，于是x^{*}应该或者满足条件（i）$x^{*}\in M$，否则满足条件(ii)$x^{*}\overline{\in}M$。但事实上由（i）推出$x^{*}\overline{\in}f(x^{*})$，矛盾；由（ii）推出$x^{*}\in M$，也矛盾。说明$|X|=|p(X)|$不可能，故$|X|<|p(X)|$。

〔证完〕

§5 关　　系

“关系”二字在已往的学习中多次使用过，如实数之间的大小关系，集合之间的包含关系，通常所谓的函数关系，等等。到底什么是“关系”？在这一节里，我们将从集合的观点出发来描述这一概念，同时着重地讨论几类常用的关系。

设X是一个集合，任取X的元素a与b配成有序对子（a，b），叫序偶。其中a叫（a，b）的第一坐标，b叫第二坐标，对于两个序偶（a，b）与（a'，b'）来说，$(a, b)=(a', b')$当

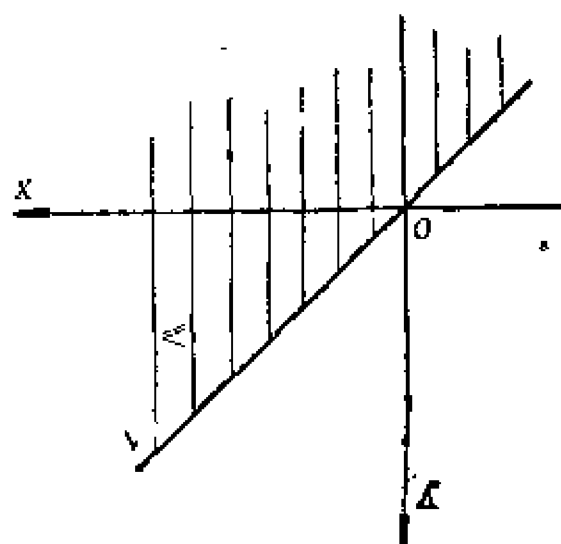
且仅当$a=a'$、$b=b'$同时成立时。

凡是由序偶组成的集合，我们统称作关系。确切地说，若R是一个集合，它的元素是以X中的元素为坐标的序偶，则称R是X中的一个关系。令

$$X\times Y=\{(x,\ y):x\in X,\ y\in Y\}$$

叫作X与Y的直积。那么所谓R是X中的一个关系，即指$R\subset X\times X$。

$(a,\ b)$是关系R的一个元素，除去通常的表示$(a,\ b)\in R$外，我们也常常写成aRb。



举例，设X是实数集，通常的$\geqslant$就是X中的一个系。若以图形来示意，那么图中有阴影的部分就代表了"关系$\geqslant$"，而无阴影部分代表的是通常的"$<$关系"，对角线Δ代表"$=$关系"。此外，$E_1=\{(x,\ y):x^2+y^2<1\}$，$E_2=\{(x,\ y):y=\sin x\}$也都各自是$X$中的、彼此不相同的关系。特别$X\times X$本身也是一个关系。

现在我们介绍关系的运算以及一些简单的运算法则：

一、逆关系

设R是集X中的一个关系。我们把

$$R^{-1}=\{(b,\ a):(a,\ b)\in R\}$$

叫作R的逆。

容易看出，R^{-1}是X中的一个关系。如果我们把集合$\{a:(a,\ b)\in R\}$叫作R的定义域，把$\{b:(a,\ b)\in R\}$叫作R

的值域，那么R^{-1}的定义域正好是R的值域，而R^{-1}的值域正是R的定义域。从直观示意图上来看，因为(a, b)和(b, a)关于对角线是对称的，所以R与R^{-1}就是$X\times X$中关于对角线呈对称的两个子集。此外，也容易推出$(R^{-1})^{-1}=R$；当A,B都是X的子集时，$(A\times B)^{-1}=B\times A$。

二、复合关系

设R、S都是X中的关系，我们把

$S\circ R=\{(a, c)$：存在$b\in X(a, b)\in R, (b, c)\in S\}$叫作$R$和$S$的复合。

$(a, c)\in S\circ R$，可以理解为X中的点a通过R的作用变到X中的某一点b，而b又通过S的作用变到c。

一般来说，$S\circ R\neq R\circ S$，即关系的复合运算不满足交换律。例如，$R=\{(1, 2)\}$，$S=\{(0, 1)\}$，此时$S\circ R=\varnothing$，而$R\circ S=\{(0, 2)\}$。

我们可以证明关系的复合运算满足结合律，即

$$T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$$

这是因为当$(a, b)\in T\circ(S\circ R)$时，就推出存在$d\in X$使得$(a,d)\in S\circ R$，$(d, b)\in T$。进而推出存在$c\in X$使得$(a, c)\in R$，$(c,d)\in S$，又有$(d,b)\in T$，所以$(a,b)\in(T\circ S)\circ R$。反过来推导依然成立。从而说明$T\circ(S\circ R)$和$(T\circ S)\circ R$是相等的。

此外，等式

$$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$$

成立，其证明留给读者自行练习。

三、设R是集合X中的一个关系，$a\in X$，$A\subset X$，我们令

$R(a)=\{b:(a, b)\in R\}$，

叫作点a在关系R下的像。

令

$$R[A]=\{b: 存在 a\in A, (a, b)\in R\},$$

叫作集A在关系R下的像。

显然

$$R[A]=\bigcup_{a\in A} R[a],$$

此外取像这种运算满足下列法则

$$(S\circ R)[A]=S[R[A]]$$

$$R[\bigcup_{i\in I} A_i]=\bigcup_{i\in I} R[A_i]$$

$$R[\bigcap_{i\in I} A_i]\subset\bigcap_{i\in I} R[A_i]$$

证明从略，请读者自己补充。

最后我们来介绍几类常用的关系：

（一）恒等关系

集X上的恒等关系$\triangle$是指

$$\triangle=\{(x,x): x\in X\}.$$

（二）自反关系

如果R是X中的一个关系，并且满足条件 $R\supset\triangle$，那么R就叫作X上的一个自反关系。

（三）对称关系

当关系R满足条件$R=R^{-1}$，即对任意的$(a, b)\in R$恒有$(b, a)\in R$成立时，称R是对称的。

（四）传递关系

当关系R满足条件$R\circ R\subset R$，即对任意的(a, b)、$(b, c)\in R$，恒有$(a, c)\in R$成立时，称R是传递的。

（五）等价关系

如果X中的关系R同时具有自反性、对称性和传递性，那么R就叫作X上的一个等价关系。

等价关系是一类重要的、非常有用的关系。当R是X上的等价关系时，我们把X中形如$R(x)$的子集叫作等价类。显见$x \in R(x)$，$X = \bigcup \{ R(x) : x \in X \}$。此外，我们不难证明：任意两个等价类$R(x)$与$R(y)$，或者$R(x) = R(y)$，否则$R(x) \cap R(y) = \varnothing$。这是因为，若$z \in R(x) \cap R(y)$，那么就有$(x, z) \in R$，$(y, z) \in R$，根据$R$的对称性和传递性推出$(\chi, y) \in R$，进而既能推出$R(x) \subset R(y)$，又能推出$R(x) \subset R(y)$，所以$R(\chi) = R(y)$。我们以等价类作元素，就构成了一个新的集合$\mathscr{A}$。此时$\mathscr{A}$就是一个以$X$的、彼此不相交的、非空子集为元素的集族，并且使得$X = \bigcup \{ A : A \in \mathscr{A} \}$。我们把这样的集族$\mathscr{A}$叫作$X$的一个分解。那么给定了$X$上的一个等价关系$R$，就决定了$X$的一个分解。反之，若$\mathscr{A}$是$X$的一个分解，令

$$R = \bigcup \{ A \times A : A \in \mathscr{A} \}.$$

容易证明R一定是X上的一个等价关系，并且$\mathscr{A}$的一个元素就正好是一个等价类。

（六）函数关系

函数是我们熟悉的概念。设给定集A、集B以及某个对应法则f，使对每个$a \in A$有唯一确定的、B中的元素b与之对应的话，我们就称f是A到B的一个函数（或映射），记作

$$f : A \longrightarrow B$$

其中b叫作点a在f下的像，表示为$b = f(a)$。

如果我们以$a \in A$为第一坐标、以相应的$b = f(a)$作第二坐标配成序偶(a, b)，这样得到的序偶的集合f就是$X = A \cup B$

中的一个关系。因此，我们可以把函数看成是一类特殊的关系：设f是集X中的一个关系，使得当$(a, b)\in f$与$(a, b')\in f$同时成立时就有$b=b'$，则称f是一个函数。这样去处理，使得函数与函数图形完全一致了，都是$X\times X$中的一个子集f，从而给我们的讨论带来许多方便，例如函数f^*是函数f的扩充（f是f^*的限制）就可以表示为$f^*\supset f$。

函数f作为关系，它满足关系的一般性质：

$$f[\bigcup_{i\in I} A_i]=\bigcup_{i\in I} f[A_i]$$

$$f[\bigcap_{i\in I} A_i]\subset\bigcap_{i\in I} f[A_i]$$

$$f^{-1}[\bigcup_{i\in I} B_i]=\bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$$

此外，它还具有如下性质：

$$f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i]=\bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$$

$$f^{-1}[B_1-B_2]=f^{-1}[B_1]-f^{-1}[B_2]$$

$$f\circ f^{-1}[B]\subset B.$$

在以后的讨论中，我们一般地使用“映射”，仅在值域是数集时采用“函数”，这只是一种习惯的说法，没有什么实质的不同。上面所列的这些性质读者应该熟习，并给出证明。

§6　序关系、序型

设X是一个集合，R是X中的一个关系，当下列条件：

（1）若$(x, y)\in R$，$(y, z)\in R$，则$(x, z)\in R$；

（2）对每一个$x\in X$，$(x, x)\in R$；

成立时，称R是X上的一个半序关系，并把具有半序关系的集合X叫作半序集，为了注明半序关系写作(X, R)。

习惯上，半序关系常采用记号$<$。把$x<y$读作x前于（小

于）y，自然也可以说y后于（大于）x。

如果半序关系$<$同时满足条件

（3）对任意的x、$y\in X$，或$x<y$或$x=y$或$y<x$，三式之中必有一式成立。则称（X，$<$）是一个全序集，也叫线性序集。

以后在讨论中凡是记号$\leqslant$，都是指或$<$或$=$之意。

下面举几个半序集和全序集的例子：

（1）设X是实数集合，$<$与$>$就是通常的小于关系与大于关系，那么（X，$<$）与（X，$>$）就都是全序集，并且是不同的两个全序集，前者是较小的实数排在前，后者却是较大的实数排在前。

（2）设M是一个集合，$P(M)$代表M的子集构成的集合$\subset$是通常的包含关系，那么（$P(M)$，$\subset$）就是一个半序集。

（3）在实数坐标平面上，当两个点具有相同的第二坐标时，我们规定第一坐标小者在前。这样定义的序关系使平面点集成为一个半序集。此时，第二坐标不同的点就没有前后关系。

如果我们换一种定义：

$(x_1, y_1)<(x_2, y_2)$当且仅当$y_1<y_2$ 或$y_1=y_2$且$x_1<x_2$，那么平面点集就成全序集了。

（4）自然数集合可以按自然顺序排成全序集

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\cdots$$

也可以先按递增顺序排出所有奇数再排所有偶数

$$1, 3, 5, \cdots, 2, 4, 6, \cdots\cdots$$

这仍是一个全序集，甚至可以不拘用什么方式先把所有有理数排成一个序列

$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\cdots$

然后规定自然数的顺序如下：

$n < n'$ 当且仅当 $r_n < r_{n'}$

此时<仍使自然数集合成为一个全序集。

上面所列举的例子已告诉我们，同一个集合可以按多种方式排序，即使就线性序而言，也可以排得形式各异。

设 $(X, <)$ 是一个半序集，$A \subset X$，$x_0 \in X$。

如果对于每一个$x \in A$，恒有 $x \leqslant x_0$ 成立，则称A是上方有界的，x_0就是A的一个上界，特别当$x_0 \in A$，并且x_0是A的上界时，x_0叫A的最大元。类似地，我们可以定义下界与最小元。

如果$x_0 \in A$并且对任意的$x \in A$不出现$x_0 < x$，则称x_0是A的一个极大元。类似地可以定义极小元。

最大元一定是极大元。对全序集来说，极大元也必是最大元，但对半序集来说，极大元未必是最大元。

最后，我们介绍序型的概念。为了叙述上的简便，我们只限于全序集来考虑。

定义 5　设X、Y都是全序集，f是从X到Y上的一个一一对应，如果f保持顺序（即当$x < x'$时，有$f(x) < f(x')$），则称f是X到Y上的相似映射。

当存在X到Y上的相似映射时，称X与Y相似。容易证明，相似是一种等价关系。我们把彼此相似的全序集称作是具有相同序型的，或说它们是序同构的。

由n（n是自然数或0）个元素构成的全序集彼此相似，它们的序型就记作n；自然数集按自然顺序是一个全序集，它的序型记作ω；容易看出，在自然顺序下，实数集R与有理数集Q、自然数集N三者序型互不相同。

§7 实 数

在一般拓扑学中，实数是一个有用的工具，搞清实数的构造很有必要。

实数理论是在有理数理论的基础上建立的。本节主要介绍无理数的引入，其基本思想是：有理数集合按自然顺序是一个线性序集，但这个线性序集有许多“孔隙”，我们引入无理数来填补这些孔隙。由于刻画“孔隙”的方法是多种多样的，因此出现了定义实数的不同方法，有的采用Cauchy列，单调列，有的采用确界，区间套，……等，但是所有这些方法都起了异曲同工的作用，各自在填补了“孔隙”之后所得到的线性序集都是序同构的。我们只介绍Dedekind分割法。

设X是一个线性序集，所谓（A、B）是X的一个分割，乃指：A和B是使得$A\cup B=X$成立的、不相交的、非空子集，并且对任意的$a\in A$与任意的$b\in B$恒有$a<b$成立。其中A叫作分割的前段，B叫后段。

对于有理数集合（按自然序）Q来说，从逻辑上讲，Q的分割（A、B）只有四种可能：

（1）A无最大元，B有最小元r；

（2）A无最大元，B无最小元；

（3）A有最大元r，B无最小元；

（4）A有最大元r_1，B有最小元r_2。

由于有理数集Q的稠密性，即对于任意的有理数r_1，r_2，当$r_1<r_2$时，则存在有理数r使得$r_1<r<r_2$。情形（4）事实上不可能发生。

情形（1）和（3），分割（A，B）都唯一决定了一个有

理数r。我们约定今后凡遇有情形(3)时一律移r于B中。换句话说，今后所说的有理数集合Q的分割或者是形如(2)者，否则便是形如(1)者。

对于形如(1)的分割(A, B)，我们说分割(A, B)对应于有理数r；对于形如(2)的分割(A, B)，不存在相应的有理数，就叫一个孔隙。

我们定义分割之间的顺序如下：

$(A_\alpha, B_\alpha) < (A_\beta, B_\beta)$ 当且仅当$A_\alpha \subsetneqq A_\beta$。

显然，<是线性序，并且当(A_α, B_α)与(A_β, B_β)各自对应于有理数α与β时，$(A_\alpha, B_\alpha) < (A_\beta, B_\beta)$和$\alpha < \beta$相一致。因此我们定义：每一个分割$(A, B)$叫一个实数。当$(A, B)$对应于有理数$r$时，就认为$r = (A, B)$；当$(A, B)$是孔隙时，便认为$(A, B)$是填补上的一个无理数。

定理1.7 有理数在实数中是稠密的（即对于任意二实数α和β，当$\alpha < \beta$时，则存在有理数r使得$\alpha < r < \beta$）。

证明 设$\alpha = (A_\alpha, B_\alpha)$，$\beta = (A_\beta, B_\beta)$，于是当$\alpha < \beta$时，就有$A_\alpha \subsetneqq A_\beta$，任取$r \in A_\beta - A_\alpha$，且$r \neq \alpha$，则$r$即为所求。

〔证完〕

定理1.8 设$\alpha = (A, B)$是无理数，ε是大于0的实数，则存在两个有理数r_1和r_2，使得$r_1 < \alpha < r_2$并且$r_2 - r_1 < \varepsilon$。

证明 不妨设ε是有理数（否则可以于0和ε之间取有理数ε'代之）。任取$a_0 \in A$，$b_0 \in B$，并做一列有理数

$$a_0,\ a_1 = a_0 + \frac{\varepsilon}{2},\ \cdots,\ a_n = a_0 + n \cdot \frac{\varepsilon}{2},$$

由于当$n > \frac{2(b_0 - a_0)}{\varepsilon}$时，$a_n > b_0$，从而$a_n \in B$。设$k$是第一个使$a_k \in B$的标号，从而$a_{k-1} \in A$，于是$r_1 = a_{k-1}$，$r_2 = a_k$即为

所求。

〔证完〕

我们已经知道，有理数集合有许多孔隙，而且为了填补这些孔隙我们引入了无理数，组成实数集合。那么一个十分自然的问题出现了：实数集合还有孔隙吗？下面的定理——完备性定理——回答了这一问题。

定理1.9 对实数集R的任意分割（X，Y），或者X无最大元而Y有最小元，否则X有最大元而Y无最小元。

证明 设A、B分别是含于X、Y中的有理数集合，于是（A，B）构成有理数集合Q的一个分割。因为有理数集Q自身的稠密性，只可能有三种情形出现：

（1）A无最大元，B有最小元r；

（2）A无最大元，B无最小元；

（3）A有最大元r，B无最小元。

在情形（1），B的最小元r必然也是Y的最小元，否则就有$\beta\in Y$，使得$\beta<r$，从而根据定理1.7推出存在有理数r'使得$\beta<r'<r$，与r是B的最小元相矛盾。同时由r是Y的最小元又推出X无最大元，否则与定理1.7相矛盾。

在情形（3），证明方法类似，推出X以r为最大元而Y无最小元。

在情形（2），（A，B）便定义了一个无理数ξ，若$\xi\in X$，则ξ便是X的最大元，此时Y不再有最小元；否则$\xi\in Y$，于是ξ便是Y的最小元，此时X不再有最大元。

归纳起来，无论是哪种情形，分割（X，Y）不外乎定理中所述两种情况之一。

〔证完〕

最后，我们讨论实数的二进小数展开。

线段〔0，1〕叫作第0级的线段，记作$\triangle$，线段〔0，$\frac{1}{2}$〕，〔$\frac{1}{2}$，1〕叫作第1级的线段，分别记作$\triangle_0$、$\triangle_1$，将每个第1级线段二等分，得到第2级线段，分别记作$\triangle_{00}$、$\triangle_{01}$、$\triangle_{10}$、$\triangle_{11}$，依次下去，将第n级线段$\triangle i_1 i_2 \cdots i_n$二等分，得到第$n+1$级线段$\triangle i_1 i_2 \cdots i_n 0$与$\triangle i_1 i_2 \cdots i_n 1$。

对〔0，1〕中的任一实数x，只有两种可能，或者x能表示为$\frac{m}{2^n}$形状、或者不能表示为此种形状。在后者情况下，x必然唯一地属于某一个第$n(n=1, 2, \cdots\cdots)$级线段，从而一意地决定了一个序列

$$\triangle i_1 \supset \triangle i_1 i_2 \supset \triangle i_1 i_2 i_3 \supset \cdots \supset \triangle i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \supset \cdots\cdots$$

使列中线段以x为唯一的公共点。此时x就可表示成二进小数

$$x = 0.i_1 i_2 \cdots i_n \cdots\cdots$$

其中i_n或取0或取1。

在前一情形，x是二进有理数$\frac{m}{2^n}$，无妨认为$\frac{m}{2^n}$是既约形式。由于此时x是某两个第n级线段$\triangle_*$与$\triangle_{*'}$的共同端点，比如说，x是$\triangle_* = \triangle i_1 \cdots i_{n-1} 0$的右端点同时是$\triangle_{*'} = \triangle i_1 \cdots i_{n-1} 1$的左端点，于是$x$将是$\triangle_{*1}$的右端点同时是$\triangle_{*'0}$的左端点，……从而决定了两个序列

$$\triangle i_1 \supset \triangle i_1 i_2 \supset \cdots \supset \triangle i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 0 \supset \triangle i_1 \cdots i_{n-1} 01 \supset \triangle i_1 \cdots i_{n-1} 011 \supset \cdots\cdots$$

与

$$\triangle i_1 \supset \triangle i_1 i_2 \supset \cdots \supset \triangle i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 1 \supset \triangle i_1 \cdots i_{n-1} 10 \supset \triangle i_1 \cdots i_{n-1} 100 \supset \cdots\cdots$$

使每个列各自皆以x为公共点。此时x就有两种二进小数表示

$$x=0.i_1i_2\cdots i_{n-1}011\cdots\cdots$$

与

$$x=0.i_1i_2\cdots i_{n-1}100\cdots\cdots$$

给定一个二进小数表示式

$$0.i_1i_2\cdots i_n\cdots\cdots$$

就决定了一个单调上升的自然数（有限或无限）列

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots\cdots$$

使得当且仅当$i_{n_k}=1$。这个对应是所有形如$0.i_1i_2\cdots i_n\cdots\cdots$的二进小数到$P(N)$上的一一对应，其中$P(N)$的元素是自然数集$N$的子集。由于除去二进有理数外，任何$x\in[0,1]$的二进小数表示式是唯一的。而二进有理数总共是可数多个，所以$[0,1]$与$P(N)$有相同的势。

通常我们以C（或$S\setminus S$）表示实数集合R的势叫连续统势。上述讨论给出$P(N)$的势是c，所以$c>\aleph_0$。

§8　线性序集

有理数集Q和实数集R作为两个特殊的线性序集我们已有一些认识，在这一节里，我们要研究的是什么样的线性序集与Q序同构？什么样的线性序集与R序同构？

定理1.10　设D是$[0,1]$中一切二进有理数的集合，X是可数线性序集，则

（1）X与D的某子集序同构；

（2）当X是稠密的（即对于任意的x、$y\in X$，当$x<y$时，存在$z\in X$　使得$x<z<y$）并且既无最大元又无最小元时，X与D序同构。

证明　把D分解为

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$$

其中

$$D_1=\{\frac{1}{2}\}$$

$$D_2=\{\frac{1}{4},\ \frac{3}{3}\}$$

…………………

$$D_n=\{\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \cdots\cdots,\ \frac{2^n-1}{2^n}\}$$

……

同时把X随意排成一列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n\cdots\cdots \qquad (1)$$

现在来建立相似对应 f。首先令$f(\frac{1}{2})=x_1$。其次考虑$\frac{1}{4}$，当序列（1）中不存在前于x_1者，舍掉$\frac{1}{4}$；当序列（1）中存在前于x_1者，取下标最小的、前于x_1的元素x_n，令$f(\frac{1}{4})=x_n$。转而考虑$\frac{3}{4}$，当序列（1）中不存在后于x_1者，舍掉$\frac{3}{4}$；当序列（1）中存在后于x_1者，取下标最小的，后于x_1的元素x_n，令$f(\frac{3}{4})=x_n$。依次转而考虑D_3中的数，从$\frac{1}{2}$开始…。总的原则是，当D_{n-1}中诸数考虑完以后，就考虑D_n中的数，依$\frac{1}{2^n}$，$\frac{3}{2^n}$…，由小到大的次序进行。当考虑$d\in D_n$时，如果在已考虑的、未舍掉的诸数中，d_1，d_2是与d紧相邻的数，$d_1<d<d_2$（有时

紧相邻的只有d_1或d_2一个)，并且$f(d_1)=x_{n1}$，$f(d_2)=x_{n2}$，那么当序列(1)中不存在合于条件$x_{n1}<x_n<x_{n2}$的数x_n时，舍掉d；否则取下标最小的，合于条件$x_{n1}<x_n<x_{n2}$的x_n，令$f(d)=x_n$。

按照上述方法，对每一个n，当D_n考虑完后转入D_{n+1}，从小到大继续做下去。于是得到未舍掉的二进有理数集D'到X的映射f。留下的是要证明f是D'到X上的映射，而f是相似映射则是显然的。

为证明f是到X上的映射，我们采用反证法，假设X中有元素不是任何$d\in D$的像，取其下标最小者x_n。设$f(d_i)=x_i$，$i=1, 2, \cdots, n-1$，并设$\{d_1,\cdots,d_{n-1}\}\subset\bigcup_{j=1}^{k}D_j$。将$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{n-1}$按$X$原有序关系排列，那么不外乎下列三种情形：

(1) x_n以x_p，x_q (p，$q\leqslant n-1$) 为相邻二元素，$x_p<x_n<x_q$；

(2) x_n在所有x_p，$p\leqslant n-1$，之前；

(3) x_n在所有x_p，$p\leqslant n-1$，之后。

由于D_{k+1}中恒有数d，使d合于条件：

(1′) $d_p<d<d_q$；

(2′) d在所有d_p，$p\leqslant n-1$，之前；

(3′) d在所有d_p，$p\leqslant n-1$，之后。

所以无论是(1)、(2)、(3)哪种情形，总有分别合于条件(1′)、(2′)、(3′)的、D_{k+1}中的最小的数d，依据f的定义，有$f(d)=x_n$，这与假设相矛盾。说明X中每一个元素x_n都必是某个$d\in D$的像，即f是D'到X上的映射，从而是相似映射。

特别，当X是稠密的且无最大、最小元时，因在f的建立

过程中不会舍掉任何$d\in D$，从而f是D到X上的相似映射，故X与D序同构。〔证完〕

推论 设X是可数线性序集，并且既无最大、最小元，又是稠密的，则X与有理数集R序同构。

关于线性序集的分割，上节已有定义。对于任何线性序集的分割（A，B）来说，不外乎下列四种情形：

（1） 前段A有最大元，后段B无最小元；

（2） 前段A无最大元，后段B有最小元；

这两种形式的分割（A，B）统称Dedekind分割。

（3） 前段A有最大元，后段B有最小元；这样的分割（A，B）叫"间隔"。

（4） 前段A无最大元，后段B无最小元，这样的分割（A，B）叫"孔隙"。

当线性序集X的所有分割都是Dedekind分割时，称X是连续的。若D是X的子集，并且对于任意的x_1，$x_2\in X$，当$x_1<x_2$时，存在$d\in D$使得$x_1<d<x_2$，则称D是X的稠密子集。容易证明，若X存在间隔，则X没有稠密子集。

显然，实数集R是既无最大元又无最小元的、连续的线性序集，并且有可数的稠密子集。那么，什么样的线性序集与R序同构呢？

定理1.11 设X是既无最大元又无最小元的、连续的线性序集，则当X有可数的稠密子集时，X与实数集R序同构。

设D是X的可数稠密子集，那么由于X没有最大元、没有最小元、没有间隔，就推出了D本身是既无最大元又无最小元的、稠密的可数线性序集，根据定理1.10的推论，D与有理

数集Q序同构。

设f是D到Q上的相似映射，令f^*把D的分割（A，B）映成$(f[A], f[B])$，我们容易看出$(f[A], f[B])$是Q的一个分割，f^*是D上所有分割到Q上所有分割的相似映射。读者不难证明，D上所有分割与X是相似的，从而X与R相似。其证明的细节此处不再赘述。

§9 良序集、序数

定义6 设X是线性序集，当X的每一非空子集都有首元（最小元）时，我们称X是良序集。

如果线性序集X有首元并且X的每一个分割（A，B）的后段B都有首元，那么X必是良序集。这是因为对于X的一个非空子集M来说，只有两种可能：

（1）X的首元$x_0 \in M$。显然M也以x_0为首元；

（2）X的首元$x_0 \overline{\in} M$。令$A = \{a : a \in X$并且a前于一切$x \in M\}$，$B = X - A$，于是（A，B）是X的一个分割，此时B的首元必是M的首元。

此外，由定义直接推出良序集的子集是良序集。

我们把良序集的序型叫作序数，于是空集的序型0，n（自然数）个元素构成的线性序集的序型n以及自然数集的序型ω等都是序数。有理数集及实数集的序型不是序数。

设A和B是两个不相交的线性序集，我们在$A \cup B$上可以引入序关系$<$，使得当$a \in A$，$b \in B$时，$a < b$，而同属于A（或B）的元素之间保持原有的序关系。这样定义的$<$使$A \cup B$成为线性序集，记作$A + B$，叫有序和。

若A的序型是α，B的序型是β，由于$A+B$的序型只依赖于A的序型α与B的序型β，所以我们可以定义$\alpha+\beta$就是$A+B$的序型，叫α与β的有序和。特别当α与β都是序数时，$\alpha+\beta$也是一个序数，例如$\omega+1$就可以看作良序集$\{1, 2, \cdots, n, \cdots\cdots\}$与$\{0\}$的有序和$\{1, 2, \cdots, n, \cdots\cdots, 0\}$的序型，它仍是一个序数。序型的这种加法运算满足结合律，但不满足交换律。

一般地，设B是一个线性序集，对每一个$b\in B$，A_b也是一个线性序集，并且当$b\neq b'$时，$A_b\cap A_{b'}=\phi$，那么我们可以在集合$S=\bigcup_{b\in B}A_b$上引入序关系$<$，使得当x和x'同属一个A_b时，x和x'保持原有的顺序，当$x\in A_b$，$x'\in A_{b'}$时，按照标号$b<b'$的顺序规定$x<x'$。这样就使S成为一个线性序集，记作$\sum_{b\in B}A_b$，叫有序和。特别，当标号集B以及每一个A_b都是良序集时，有序和$\sum_{b\in B}A_b$也是良序集。由此，我们又可以定义序型的有序和。

设A、B是两个线性序集，我们可以在直积$A\times B$上引入序关系如下：

设(a_1, b_1)、$(a_2, b_2)\in A\times B$。规定$(a_1, b_1)<(a_2, b_2)$当且仅当$b_1<b_2$，或者$b_1=b_2$且$a_1<a_2$。

这种排序方法通常叫反字典排序法。此时$(A\times B, <)$是一个线性序集，记作$A\cdot B$，而相应的序型记作$\alpha\cdot\beta$，叫序型α与β的有序积。

值得注意的是

$$A\cdot B=\sum_{b\in B}A\cdot\{b\}$$

其左端是A与B的有序积，序型是$\alpha\cdot\beta$，而右端是以B为标号

集、诸$A\cdot\{b\}$的有序和，序型是$\sum_{b\in B}\alpha_b$，此处$\alpha_b=\alpha$是A的序型。

由此得出下列各式

$$\omega+\omega=\omega\cdot 2$$

$$\underbrace{\omega+\omega+\cdots+\omega}_{n\text{个}}=\omega\cdot n$$

$$\underbrace{\omega+\omega+\cdots+\omega+\cdots\cdots}_{\omega\text{型}}=\omega\cdot\omega$$

$$\underbrace{\omega+\omega+\cdots+\omega+\cdots\cdots+\omega}_{\omega+1\text{型}}=\omega(\omega+1)$$

序型的这种乘法运算不满足交换律，例如$\omega\cdot 2\neq 2\cdot\omega=\omega$；满足结合律，即$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$；此外，乘法对加法的左分配律成立，即$\gamma\cdot(\beta+\gamma)=\gamma\cdot\alpha+\gamma\cdot\beta$，但右分配律不成立，例如$(1+1)\cdot\omega\neq 1\cdot\omega+1\cdot\omega$。

一切负整数的集合$\{\cdots\cdots,-n,\cdots,-3,-2,-1\}$以及与其相似的集合，序型以$\omega^*$表示。$\omega^*$不是序数。

定理1.12 线性序集X是良序集的充要条件是X不包含ω^*型的子集。

证明 当X是良序集时，其一切子集都是良序集，当然没有ω^*型的子集。当X不是良序集时，X有子集A，A是非空的并且没有首元。任取$a_1\in A$，于是存在$a_2\in A$使得$a_2<a_1$。一般地，若a_1，$a_2\cdots$，$a_n\in A$，$a_n<a_{n-1}<\cdots<a_1$，因a_n不是A的首元，于是必有$a_{n+1}\in A$使得$a_{n+1}<a_n$，说明A包含（从而X包含）有ω^*型子集，故X不包含ω^*型子集时，X必是良序集。

〔证完〕

定理1.13 设W是良序集，映射$f: W\to W$是保持顺序

的，则对一切的$x\in W$恒有$f(x)\geqslant x$成立。

证明 用反证法。假设W中有元素x不满足$f(x)\geqslant x$，于是由W是线性序集知$f(x)<x$，取这种元素的为首者x_0，记$x_1=f(x_0)$，那么$x_1<x_0$。从而$f(x_1)<f(x_0)=x_1$，与x_0是这种元素的首元素相矛盾。

〔证完〕

设W是良序集，$x\in W$。我们把W中所有前于x的元素组成之集合叫作x决定的W的截片，记为$W(x)$，即

$$W(x)=\{y: y\in W\text{并且}y<x\}$$

这是一种特殊的子集。当$x'<x$时，两个截片$W(x')$和$W(x)$中，$W(x')$正好是良序集$W(x)$的一个截片。我们把$W-W(x)$，即$\{y: y\in W\text{并且}y\geqslant x\}$叫作$W$被$x$决定的尾部，显见$x$是尾部$W-W(x)$的首元素。

应用定理1.13，可得一系列的重要推论：

推论1 设W是良序集，$A\subset W$，$x\in A$，则不存在任何由W到$A(x)$中的、保持顺序的映射。

推论2 良序集W与其截片$W(x)$的任何子集不相似。特别，W与其截片$W(x)$不相似，即W与$W(x)$有不同的序型。

推论3 设W是良序集，x_1，$x_2\in W$且$x_1\neq x_2$，则$W(x_1)$与$W(x_2)$不相似，即W的不同截片有不同的序型。

推论4 设W_1、W_2是良序集，则W_1到W_2上的相似映射不得多于一个。

证明 假设$f: W_1\to W_2$，$g: W_1\to W_2$是两个不同的相似映射。于是存在某个$x_0\in W_1$，使得$f(x_0)=a\neq g(x_0)=b$。无妨认为$a<b$。因为$f\circ g^{-1}(b)=f(x_0)=a<b$，与$f\circ g^{-1}$是$W_2$到$W_2$上的相似映射相矛盾。

〔证完〕

推论5 设W是良序集，则W到W上的相似映射唯一，就是恒同映射。

有了上述这些关于良序集的基本理论，我们已经有条件讨论“序数的大小”这一重要课题。

定义7 设A和B是两个良序集，各自序型是α和β。当B与A的某个截片$A(x)$相似时，我们就说β比α小，表示作$\beta<\alpha$。

按此定义，$\beta<\alpha$乃指以α为型的良序集A有一个截片$A(x)$，$A(x)$的序型是β。

定理1.14 设α是一个序数，$W(\alpha)$表示一切小于α的序数之集合，则$W(\alpha)$是一个良序集，序型就是α。

证明 取序型为α的良序集A。由于每一个$x\in A$决定了A的一个截片$A(x)$，记$A(x)$的序型是β_x，于是$\beta_x\in W(\alpha)$，并且当$x'<x$时，$A(x')$就是$A(x)$的截片，所以$\beta_{x'}<\beta_x$。故把x映成β_x的映射是由A到$W(\alpha)$上的相似映射。说明$W(\alpha)$是良序集，序型是α。

〔证完〕

当A是型为α的良序集时，我们可以借助A与$W(\alpha)$间的一个相似对应，将A中元素用$W(\alpha)$中的序数为标号，保持A中原有顺序地排成

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots\cdots(\xi<\alpha)$$

特别当A的序型是ω时，就依次编号为

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots(n<\omega)$$

定理1.14已经告诉我们，若α是一个序数，那么任何两个比α小的序数β_1、β_2总是可以比较的。现在的问题是，随意给定的两个序数是否总可以比较呢？

定理1.15 （序数的可比较性定理）设α和β是任意给定的两个序数，则α与β总是可以比较的，即$\alpha=\beta$、$\alpha<\beta$、$\alpha>\beta$三式中必有且仅有一式成立。

为了证明$\alpha=\beta$、$\alpha<\beta$、$\alpha>\beta$三式中不得有二式同时成立，可以任取良序集A与B，A和B分别以α、β为序型。证明下列三种情形不会有两种同时出现：

（1） A与B相似；

（2） A与B的某截片相似；

（3） B与A的某截片相似。

事实上，当（1）和（2）同时出现时就导出B与B的某截片相似，这是不可能的。同理，（1）和（3）不会同时出现。当（2）和（3）同时出现时，A与B的截片$B(b)$相似，B与A的截片$A(a)$相似，导出A与$A(a)$的某子集相似，这仍然是不可能的。

为了证明$\alpha=\beta$、$\alpha<\beta$、$\alpha>\beta$三式中必有一式成立，我们不妨考虑两个特殊的良序集：$W(\alpha)$和$W(\beta)$。令$D=W(\alpha)\cap W(\beta)$。

首先证明一个引理：若$D\subsetneqq W(\alpha)$，则D是$W(\alpha)$的一个截片。

证明 因为$D\subsetneqq W(\alpha)$，所以$W(\alpha)\setminus D$非空，应有首元素，记为δ_1。$W(\delta_1)$就是$W(\alpha)$的一个截片。

比较D与$W(\delta_1)$。一方面，从δ_1是$W(\alpha)\setminus D$的首元素推出$\delta_1\overline{\in}D$并且$W(\delta_1)\subset D$；另一方面，对于任何一个$x\in D$，只可能是$x<\delta_1$（否则就是$\delta_1<x$，从而由$\delta_1<x<\alpha$和$\delta_1<x<\beta$推出$\delta_1\in D$，但这是不可能的），即$x\in W(\delta_1)$。说明$D\subset W(\delta_1)$。两方面结合起来，就证明了$D=W(\delta_1)$。

有了这个引理，我们要证的结论是不难推出的。

从逻辑上讲，D有四种可能：

(1) $D=W(\alpha)$, $D=W(\beta)$;

(2) $D=W(\alpha)$, $D\subsetneqq W(\beta)$;

(3) $D\subsetneqq W(\alpha)$, $D=W(\beta)$;

(4) $D\subsetneqq W(\alpha)$, $D\subsetneqq W(\beta)$。

但事实上(4)的情形不可能出现。这是由于当$D\subsetneqq W(\alpha)$和$D\subsetneqq W(\beta)$同时成立时，就推出$D=W(\delta_1)$，$\delta_1<\alpha$同时有$D=W(\delta_2)$，$\delta_2<\beta$。从而推出$\delta_1=\delta_2<\alpha$和β，$\delta_1\in D=W(\delta_1)$，这一结果显然是不可能的。

因此只能是(1)、(2)、(3)三种情况之一，即$\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$，$\beta<\alpha$三式之一成立。

〔证完〕

推论 设A、B是良序集，序型分别是α、β，若$B\subset A$，则$\beta\leqslant\alpha$。

定理1.16 凡由序数构成的集合都是良序集。

要证明此定理，只须证明：若A是非空的序数集，则A有首元素。

证明 任取一元$\alpha\in A$，或α是A的首元；否则$W(\alpha)\cap A$非空，这是一个良序集，应有首元α'，显然α'也是A的首元。

〔证完〕

定理1.17 设α是一个序数，则$\alpha<\alpha+1$，并且不存在序数ξ使得$\alpha<\xi<\alpha+1$，即$\alpha+1$是大于α的最小序数。

证明 取α型的良序集A，另外再取$b\overline{\in}A$，令$B=A+\{b\}$，于是B的序型就是$\alpha+1$。

因为A是B的截片（由尾元素b决定的），所以$\alpha<\alpha+1$，

又因为B的截片或者是A，否则便是A的截片，所以小于$\alpha+1$的序数或者是α，否则便小于α，即不存在序数ξ使得$\alpha<\xi<\alpha+1$。

〔证完〕

我们知道，对于给定的一个序数α来说，总有比α大的序数，并且$\alpha+1$就是比α大的最小者。那么当给定的序数不是一个，而是一个序数集，情况又怎么样呢？

定理1.18 设M是一个序数集，则存在序数ξ^*比M中每一个数都大。

证明 由于M（按大小顺序）是良序集，设其序型是λ，于是M中诸元素可以用$\alpha<\lambda$作标号，保持顺序地排为

$$\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_\alpha<\cdots\cdots \qquad \alpha<\lambda$$

令

$$W=\bigcup_{\alpha<\lambda}W(\xi_\alpha)$$

并设其序型是ξ。由于$W(\xi_\alpha)\subset W$，所以$\xi_\alpha\leqslant\xi$。故$\xi^*=\xi+1$即为所求。

〔证完〕

在上述证明中我们进一步看到，当M有最大元ξ_{α_0}时，由于$W=W(\xi_{\alpha_0})$，所以$\xi=\xi_{\alpha_0}$，此时$\xi+1$就是大于一切$\xi_\alpha\in M$的最小者；当M没有最大元时，ξ就是大于一切$\xi_\alpha\in M$的最小者。

在此，我们顺便引入序数的两个概念。当序数$\alpha=\beta+1$时，称α为孤立数，此时β叫作α的前行元；我们把不是孤立数的序数称为极限数。当α是孤立数时，我们可以取其前行元β，此时区间$(\beta,\ \alpha)=\{\xi:\ \beta<\xi<\alpha\}$就是空的。而当$\alpha$是极限数时，

对于任意的$\beta<\alpha$，区间 (β,α)一定包含着无限多个序数，反之亦然。

回到我们前面的讨论上去。当序数集M有最大元ξ_{α_0}时，比M中每一数都大的第一个序数就是孤立数$\xi_{\alpha_0}+1$；当M没有最大元时，比M中每一个数都大的第一个序数ξ一定是极限数，此时我们称序数集M向ξ收敛，或说ξ是M的极限，记作$\xi=\lim M$，或 $\xi=\lim \xi_\alpha$。

最后，我们介绍超限归纳法。它是通常的数学归纳法的推广，很有用。

定理1.19 设$P(x)$是依赖于良序集X（通常X可以取作某个$W(\alpha)$）中元素x的命题，若满足条件：

（1）对X的首元x_0，$P(x_0)$成立；

（2）设$x'\in X$。当$P(x)$对一切$x<x'$成立时，那么$P(x')$成立；

则对所有的$x\in X$，$P(x)$恒成立。

证明 用反证法。假设对X中的某些元素x，$P(x)$不成立。取这种元素的首元，设为x'。显然$x'\neq x_0$，并且对一切$x<x'$，$P(x)$成立。依据（2），$P(x')$成立，与x'的取法矛盾。

〔证完〕

特别，当$X=W(\omega)$时，定理就是通常的数学归纳法。

§10 可数超限数

在有限场合，势为n（n是非负整数）的良序集的序型是唯一的。就是n，这种序数我们称之为第一级序数。所有第一级序数按自然的大小顺序构成良序集，记作W_0，$|W_0|=\aleph_0$，

在无限场合，情况就不一样了。例如良序集

$$\{1, 2, \cdots, n, \cdots\cdots\}$$

$$\{2, 3, \cdots, n, \cdots\cdots, 1\}$$

$$\{1, 3, \cdots\cdots, 2, 4\cdots\cdots\}$$

等，虽然它们的势都是$\aleph_0$但序型$\omega, \omega+1, \omega+\omega$却各不相同。我们把势为$\aleph_0$的良序集的序型称为第二级序数，或称为可数超限数。所有可数超限数按自然顺序构成良序集，记作Z_1。

定理1.20 设M是可数个可数超限数的集合，则比M中一切序数都大的最小序数仍是可数超限数。

证明 从定理1.18的证明已经知道，当M有最大数α时，$\alpha+1$就是比M中一切数都大的最小数。此时从α是可数超限数得知$\alpha+1$也是可数超限数。当M没有最大数时，比M中一切数都大的最小数 $\lim M$就是良序集$\bigcup\limits_{\xi\in M} W(\xi)$的序型。由于$\bigcup\limits_{\xi\in M} W(\xi)$是可数集，所以$\lim M$是可数超限数。

〔证完〕

推论1 Z_1是非可数集。

我们用$\aleph_1$表示Z_1的势。容易知道，$W_1 = W_0 \cup Z_1$的势也是$\aleph_1$。

我们将大于W_1中一切数的最小序数记作ω_1，于是$\omega_1 = W(\omega_1)$，由此可知ω_1是第一个非可数的序数，是W_1的序型，也是Z_1的序型，是W_1的任意一个非可数子集的序型。由此又推出W_1的任意一个非可数子集的势总是$\aleph_1$。

推论2 不存在势为m，$\aleph_0 < m < \aleph_1$，的集合。

证明 假设有这样的集合，那么由$m<\aleph_1$推出集合W_1有势为m的子集M，又由$m>\aleph_0$推出M的势$m=\aleph_1$，与$m<\aleph_1$矛盾。

〔证完〕

最后，我们引入歛尾子集的概念。

定义8 设W是良序集，$A\subset W$。A叫作W的歛尾子集是指对任意的$\xi\in W$，存在$\eta\in A$使得$\xi\leqslant\eta$。此时也说A在W中歛尾。

容易看出，对于良序集$W(\alpha+1)$来说，单元素集$\{\alpha\}$就在$W(\alpha+1)$中歛尾。

定理1.21 设λ是一个可数极限数，则存在递增的序数列

$$\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_k<\cdots\cdots\quad(k<\omega)$$

在$W(\lambda)$中歛尾。

证明 把可数集$W(\lambda)$随意排成一列

$$\xi_0,\quad\xi_1,\quad\cdots,\quad\xi_n,\quad\cdots\cdots(n<\omega)$$

取$\eta_0=\xi_0$。因为λ是极限数，并且$\eta_0<\lambda$，所以列$\{\xi_n\}_{n<\omega}$中有数ξ_n比η_0大，取其下标最小者ξ_{n_1}，令$\eta_1=\xi_{n_1}$，继而同理可取列$\{\xi_n\}n<\omega$中比η_1大的、下标最小者是ξ_{n_2}作η_2，依次进行，得到递增的序数列

$$\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_k<\cdots\cdots\qquad(k<\omega)$$

显见每一个$\eta_k=\xi_{n_k}<\lambda$，并且ξ_{n_k}的下标n_k是递增的，即$n_k<\eta_{k+1}$。留下的只须证明$\{\eta_k\}_{k<\omega}$在W(λ)中歛尾。事实上，设$\xi\in W(\lambda)$，于是ξ即某个ξ_n由于$\{n_k,\ k<\omega\}$是递增的，必有某个$n_k>n$，依据ξ_{n_k}的取法，必然是$\xi_{n_k}\geqslant\xi_n$，即$\eta_k\geqslant\xi$。说明$\{\eta_k\}_{K<\omega}$在$W(\lambda)$中歛尾。

〔证完〕

定理1.22 设λ是极限数，$A\subset W(\lambda)$。若A在W(λ)中歛尾，则$\lim A=\lambda$。

证明 假设$\lim A\neq\lambda$，于是$\lim A<\lambda$，因λ是极限数，所以

存在序数ξ使得

$$\lim A < \xi < \lambda,$$

此时$\xi \in W(\lambda)$，但A中一切数都比ξ小，由此得出A在$W(\lambda)$中不敛尾，与题设条件矛盾。

〔证完〕

按照敛尾这一术语，定理1.20即是：W_1的任何可数子集在W_1中不敛尾。

§11 选择公理

1904年 *Zermelo* 首次提出了选择公理，并用它来证明良序定理。虽然这一公理曾一度在数学界引起激烈的争议，但毕竟应当承认，选择公理的提出对整个近代数学理论的发展，特别是对许多重要定理的严格论证，起了巨大的推进作用。事实上，我们早已不只一次地使用过选择公理，只是未曾明确指出罢了。本节介绍选择公理，同时列举了几个常用的、和选择公理等价的命题。

选择公理 设$\mathscr{A}$是一族非空集合，则存在函数$f: \mathscr{A} \longrightarrow \bigcup\{A: A \in \mathscr{A}\}$，使得$f(A) \in A$对一切$A \in \mathscr{A}$成立。此处的$f$叫作选择函数。

相等价的命题是，若$\mathscr{A}$是一族彼此不相交的非空集合，则存在集合M，使得对于每一个$A \in \mathscr{A}$，$M \cap A$是单元素集合。此处$M \cap A$中的、唯一的元素就叫作A的代表元。

如果将$\mathscr{A}$中诸A皆各自赋以标号，记作A_i，$i \in I$。并以$\times\{A_i: i \in I\}$表示所有选择函数f的集合，称$\times\{A_i: i \in I\}$为集族$\mathscr{A} = \{A_i: i \in I\}$的直积，那么选择公理即是说：当每一个$A_i (i \in I)$都是非空集合时，直积$\times\{A_i: i \in I\}$非空。

下面我们由选择公理推证著名的良序定理。所用方法是最基本的，无须借助更多的序数理论。

定理1.23 （*Zermelo*）每一个集合都可以良序化（即成为良序集）。

证明 设X是任意给定的集合。

由于对X的每一个真子集A来说，余集$X\setminus A$总是非空的，根据选择公理，对每一个真子集A就有唯一确定的$f(A)\in X\setminus A$。$f(A)$是$X\setminus A$的代表元，现在叫作A的随行元。此外，我们还把集

$$A_+ = A\cup\{f(A)\}$$

叫作集A的后继者。

为了整个证明条理清楚，我们给出下列一些定义与引理。

定义 如果T是X的一族子集，并且满足下列条件：

(1) $\varnothing\in T$；

(2) T中任意多个元素之并仍属于T；

(3) 当$A\in T$并且A是真子集时，$A_+\in T$。那么我们就称集族T是一个链。

显见，X的所有子集之族$P(X)$是一个链。同时容易验证任意多个链的交是一个链，所以存在最小链。

我们现在集中力量来讨论这个最小链，无妨仍用T记之。重要的是要证明最小链T是个线性序集。

设P是T的元，当P与T中的每一个元都可以（按集合的包含关系）比较时，称P是正规元。

引理A 设P是正规元，则对于任意一个$A\in T$，或有$A\subset P$或有$P^+\subset A$成立。

引理A的证明 令$T_0=\{A: A\in T$并且或有$A\subset P$或有P^+

$\subset A$成立｝，我们来验证T_0是一个链。

（1）$\varnothing \in T_0$，这是显然的；

（2）设$A_i \in T_0$，$i \in I$。

当每一个$A_i \subset P$时，推出$\bigcup_{i\in I} A_i \subset P$；否则有某一个$A_{i_0} \supset P_+$于是推出$P_+ \subset \bigcup_{i\in I} A_i$。无论哪种情况，恒有$\bigcup_{i\in I} A_i \in T_0$。

（3）设$A \in T_0$并且A是X的真子集。

当$A \supset P_+$时，推出$P_+ \subset A_+$；

当$A = P$时，推出$P_+ = A_+$，所以$P_+ \subset A_+$；

当$A \subsetneqq P$时，一定有$A_+ \subset P$成立。（否则，由于A_+与P是可以比较的，就有$A_+ \supsetneqq P$，从而$A_+ \setminus A = (A^+ \setminus P) \cup (P \setminus A)$，其左端只含一个元素$f(A)$，而右端至少含有两个元素，显然是不能成立的）。

归结起来，无论哪种情形，恒有$A_+ \in T_0$。

至此证明了T_0是一个链，所以$T = T_0$，引理A得证。

引理B　T中每一个元都是正规元。

引理B的证明　令$T_1 = \{ P : P$是正规元$\}$。我们来验证T_1是一个链。

（1）$\varnothing$是正规元；

（2）设P_i是正规元，$i \in I$。

若$A \in T$。当每一个$P_i \subset A$时，推出$\bigcup_{i\in I} P_i \subset A$，否则，有某一个$P_{i_0} \supset A$，此时又推出$\bigcup_{i\in I} P_i \supset A$，说明$\bigcup_{i\in I} A_i$与$A$可以比较，从而$\bigcup_{i\in I} A_i$是正规元；

（3）设P是正规元并且P是X的真子集。

根据引理A，P_+是正规元。

至此证明了T_1是一个链，所以$T=T_1$，即最小链T中的每一个元都是正规元。故最小链T是一个线性序集。

C引理 最小链T是一个良序集。

引理C的证明 显见$\varnothing$是T的首元素，要证明T是良序集，只须证明T的每一个分割（T_1，T_2）的后段T_2总有最小元。

令P是T_1中所有元素的并，于是$P\in T$，并且对任意的$A_1\in T_1$和任意的$A_2\in T_2$，恒有$A_1\subset P\subset A_2$。因此P或者是T'的最大元，此时P_+就是后段T_2的最小元；否则P就是T_2的最小元。至此证明了T是良序集。

引理D f是$T-\{X\}$到X上的一一对应。

引理D的证明 设A_1与A_2是$T-\{X\}$中不相同的两个元素，无妨设$A_1\subsetneqq A_2$，显然$f(A_1)\in A_2$，而$f(A_2)\notin A_2$，所以$f(A_1)\neq f(A_2)$。说明f是一对一的。

设$x\in X$，令$P=\bigcup\{A: A\in T$并且$x\notin A\}$，显然$P\in T-\{X\}$，并且有$x=f(P)$成立（否则将推出P_+也不含有x，从而得出$P^+\subset P$的错误结果）。说明f是$T-\{X\}$到X上的映射。至此引理证完。

$T-\{X\}$是良序集，f是$T-\{X\}$到X上的一一对应，所以X就被良序化了。〔证完〕

选择公理与良序定理实际上是等价的。由后者推前者这一简单的推证留给读者自行练习。

最后，我们再列举几个与选择公理等价的命题。它们是以后经常要用的，但证明从略。

Zorn引理 设（P，$<$）是一个非空的半序集，并且P中的每一个链都有上界，则对于任意的$x\in P$，P中有极大元$x_0\geqslant x$。

此处，所谓半序集P中的链，乃指P的线性子集。

Tukey引理　设$\mathscr{A}$是一个集族（$\neq\varnothing$），若$\mathscr{A}$具有有限特征，则对于任意的$A\in\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$中（按照集合的包含关系$\subset$）有极大元$A_0\supset A$。

此处，所谓集族$\mathscr{A}$具有有限特征，乃指$\mathscr{A}$满足下列二条件：

（1）若$A\in\mathscr{A}$，则A的每一个有限子集也属于$\mathscr{A}$；

（2）当集A的每一个有限子集都属于$\mathscr{A}$时，$A\in\mathscr{A}$。

§12　势的运算

在第四节关于势的比较我们曾遗留了一个问题，有了良序定理与序数的可比较性定理，这个问题现在可以填补起来了。因为任何两个基数a与b都可以理解为两个良序集A与B的势，设A的序型是α，B的序型是β，那么依据序数α与β的大小关系：

$$\alpha<\beta,\qquad \alpha=\beta,\qquad \alpha>\beta$$

即可知道或者A与B的某子集对等，此时$a\leqslant b$，否则A有子集与B对等，从而$a\geqslant b$，至于“A不与B的任何子集对等，同时B不与A的任何子集对等”的情形是不存在的，所以任何两个基数总是可以比较的。这就是势的可比较性。

回过来再看定理1.3与定理1.20的推论，我们就可以知道，在无限基数中，$\aleph_0$是最小者，其次就是$\aleph_1$。此外，由§7的讨论我们已经知道，连续统势$c>\aleph_0$，现在自然可以推出$c\geqslant\aleph_1$。但究竟是$c=\aleph_1$还是$c>\aleph_1$呢？这就是著名的连续统问题。近代集论的研究指出，承认连续统假设（$c=\aleph_1$）与否定连续统假设二者各自既不能由其它公理推出又与其它公

理无矛盾。在文献中，常以CH表示承认连续统假设，即$c=\aleph_1$，而以$\neg CH$表示连续统假设的否定。

我们把势为a的所有序数α组成的集合记为$Z(a)$，把$Z(a)$中的最小元叫作a的初始数。例如$\aleph_0$的初始数就是ω（以后也写作ω_0），$\aleph_1$的初始数就是ω_1。因为基数与其初始数的对应是保序的，由此得结论：每一个基数集（按大小顺序）都是良序的。

鉴于基数集的良序性，我们可以用序数作标号将无限基数依大小顺序记作

$$\aleph_0,\quad \aleph_1,\quad \aleph_2,\quad \aleph_\alpha,\quad \cdots\cdots$$

而将相应的初始数记作

$$\omega_0,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \cdots\cdots\omega_\alpha,\quad \cdots\cdots$$

容易看出

$$\begin{aligned} Z(\aleph_\alpha) &= \{\xi : \omega_\alpha \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1}\} \\ &= W(\omega_{\alpha+1}) - W(\omega_\alpha) \\ W(\omega_\alpha) &= \xi : \xi < \omega_\alpha\} \\ &= W(\omega_0) + \sum_{\beta<\alpha} Z(\aleph_\beta) \end{aligned}$$

并且由定理1.14知道，ω_α是$W(\omega_\alpha)$的序型，因而$\aleph_\alpha$就是$W(\omega_\alpha)$的势。

定理1.24 设$\lambda \in Z(\aleph_\alpha)$，则存在递增的（有限或超限）列

$$\eta_0 < \eta_1 < \cdots\cdots < \eta_\beta < \cdots\cdots \qquad \beta < \sigma < \omega_\alpha$$

在$W(\lambda)$中敛尾。

证明 当$\lambda = \omega_\alpha$以及λ是孤立序数时，结论是显然的，我们只须对λ是极限序数且$\lambda < \omega_\alpha$的情形给出证明。

因为$|W(\lambda)|=\aleph_{\alpha}$，所以可将$W(\lambda)$排成型为$\omega_{\alpha}$的超限列

$$\xi_0,\quad \xi_1,\ \cdots,\ \xi_{\gamma},\ \cdots\cdots\quad \gamma<W_{\alpha}$$

首先取$\eta_0=\xi_0$，继而，当已取定了

$$\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_{\beta}<\cdots\cdots\qquad \beta<\sigma'$$

之时，若列$\{\xi_{\gamma}\}_{\gamma<\omega_{\alpha}}$中有数$\xi_{\gamma}$比一切$\eta_{\beta}$，$\beta<\sigma$、都大，此时取这种数$\xi_{\gamma}$的下标最小者作$\eta_{\sigma}$。进而再取$\eta_{\sigma+1}$。直至已取

$$\eta_0<\eta_1<\cdots\cdots\eta_{\beta}<\cdots\cdots\qquad \beta<\sigma$$

而列$\{\xi_{\gamma}\}_{\gamma<\omega_{\alpha}}$中不再有数$\xi_{\gamma}$比一切$\eta_{\beta}$，$\beta<\sigma$，都大为止。此时列$\{\eta_{\beta}\}_{\beta<\sigma}$即为所求。

〔证完〕

我们把合乎上述定理要求的递增列$\{\eta_{\beta}\}_{\beta<\sigma}$的序型$\sigma$叫作$\lambda$的敛尾数，把$\lambda$的最小敛尾数记作$cf\lambda$。不难看出，对于任意给定的$\lambda\in Z(\aleph_{\alpha})$，$cf\lambda$或者是1（当$\lambda$是孤立序数时），否则便是某个初始数$\omega_{\alpha'}$，其中$\alpha'\leqslant\alpha$。前面的定理1.21就是定理1.24的特殊情形（$\alpha=0$）。

最后，关于势的运算，我们只就本书所用到的内容作出简单介绍。

任意两个基数a与b的和定义为

$$a+b=|A\cup B|，其中|A|=a,\ |B|=b,\ A\cap B=\phi.$$

基数a与b的积定义为

$$a\cdot b=|A\times B|，其中|A|=a,\ |B|=b.$$

显然，如上定义的和与积两种运算满足交换律、结合律，以及积对和的分配律。

我们用B^A来表示直积$\times\{B_a: a\in A\}$，其中一切$B_a=B$，

即B^A是所有映射$f: A\to B$的集合。

基数的幂定义如下：

$b^a=|B^A|$，其中$|A|=a$，$|B|=b$。

关于幂运算，有下列运算法则：

$(b\cdot c)^a=b^a\cdot c^a$

$c^{a+b}=b^a\cdot c^a$

$(c^a)^b=c^{a\cdot b}$

请读者自已证明。

下面两个定理是重要的，我们给出证明。

定理1.25 设$|A|=a$，则$|P(A)|=2^a$.

证明 取$B=\{0, 1\}$，于是$|B|=2$. 对每一个$M\subset A$，令$f_M\in B^A$与其对应，其中f_M定义如下：

$$f_M(x)=\begin{cases}1, & a\in M\\ 0, & a\in A\setminus M\end{cases}$$

f_M叫作M的特征函数。因为$M\subset A$与其特征函数f_M的对应是$P(A)$与B^A间的一对一的满对应，所以$|P(A)|=|B^A|=2^a$.

〔证完〕

特别，当A是可数无限集时，得$|P(A)|=2^{\aleph}$，即$c=2^{\aleph}$.

定理1.26 (*Hessenberg*) $\aleph_\alpha\cdot\aleph s_\alpha=\aleph_\alpha$.

证明 对α作超限归纳法。

$\alpha=0$时，$\aleph_0\circ\aleph_0=\aleph_0$的成立是早已知道的。

现在假设对一切$\beta<\alpha$, $\aleph_\beta\circ\aleph_\beta=\aleph_\beta$成立，来推证$\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$成立。因为$|W(\omega_\alpha)|=\aleph_\alpha$，所以只须证明$|W(\omega_\alpha)\times W(\omega_\alpha)|=S\setminus s_\alpha$即可。

在$W(\omega_\alpha)\times W(\omega_\alpha)$上定义规范序<：

$(r_1,\delta_1)<(r_2,\delta_2)$当且仅当$\max\{r_1,\delta_1\}<\max\{r_2,$

δ_2 }

或者 $\max\{\gamma_1, \delta_1\} = \max\{\gamma_2, \delta_2\}$，$\gamma_1 < \gamma_2$

或者$\max\{\gamma_1, \delta_1\} = \max\{\gamma_2, \delta_2\}$，$\gamma_1 = \gamma_2$，$\delta_1 < \delta_2$。

容易知道，在规范序下，$W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)$是一个良序集，设其序型是$\sigma$。一方面，因为良序集$W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)$有型为$\omega_\alpha$的子集，例如$\{0\} \times W(\omega_\alpha)$，所以$\sigma \geqslant \omega_\alpha$；另一方面，对任意的$(\gamma, \delta) \in W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)$，考虑由$(\gamma, \delta)$决定的、良序集$W = W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)$的截片$W(\gamma, \delta)$，我们取

$$\lambda = \max\{\gamma, \delta\},$$

于是

$$W(\gamma, \delta) \subset W(\lambda+1) \times W(\lambda+1)$$

又因为ω_α是初始数，$\lambda + 1 < \omega_\alpha$，所以

$$|W(\lambda+1)| < |W(\omega_\alpha)| = \aleph_\alpha$$

令

$$|W(\lambda+1)| = \aleph_\beta$$

就推出

$$|W(\gamma, \delta)| \leqslant |W(\lambda+1) \times W(\lambda+1)|$$

$$= \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta < \aleph_\alpha$$

说明良序集$W = W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)$的任何截片$W(\gamma, \delta)$都不与$W(\omega_\alpha)$相似。从而$\sigma > \omega_\alpha$是不可能的。归结两个方面，得$\sigma = \omega_\alpha$，所以

$$|W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)| = \aleph_\alpha。$$

从上述超限归纳的证明情况得知，对任何无限势$\aleph_\alpha$，恒有$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$成立。

〔证完〕

推论 $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$。

第一章 习 题

1．设A、B、C是任意集合，证明

$$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C);$$

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C).$$

2．已知对任意的集合M都有$A\cup M\subset B\cup M$成立，推证$A\subset B$。

3．已知对任意的集合M都有$A\cap M\subset B\cap M$成立，推证$A\subset B$。

4．已知存在某集合C使得$A\cup C=B\cup C$和$A\cap C=B\cap C$同时成立，推证$A=B$。

5．若对于某个集合M，$A\cup M\subset B\cup M$成立，可否断言$A\subset B$？

6．若$A-B=C-D$，是否一定有$A\cup D=B\cup C$成立？

7．若$A\supset B$，$C\supset D$，$|A|=|C|$，$|B|=|D|$，是否一定有$|A-B|=|C-D|$？

8．已知$A=\{x: 0<x\leqslant 1\}$，$B=\{x: 0<x<1\}$，请具体给出一个由A到B上的一一映射。

9．已知$A=\{(x, y): 0<x<1, 0<y<1\}$，

$$B=\{(x, y): 0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1\},$$

请具体给出一个由A到B上的一一映射。

*10．已知$A=\{(x, y): 0<x\leqslant 1, 0<y\leqslant 1\}$，

$$B=\{z: 0<z\leqslant 1\},$$

请具体给出一个由A到B上的一一映射。

11．已知$A\cup B=(0, 1)$，证明A和B二者中至少有一个与区间$(0, 1)$等势。

12. 分别举出满足反身、对称、传递三性质中的两条而不满足第三条的关系的例子。

13. 就自然顺序而言，实数集R是一个线性序集。请进一步回答：

① R是良序集吗？

② R有良序的可数无限子集吗？

③ R有良序的非可数子集吗？

④ 若α代表任意给定的一个可数超限数，试问R一定有序型是α的良序子集吗？

⑤ 请举出R的四个良序子集，其序型分别是ω，$\omega+n$，$\omega\cdot n$，$\omega\cdot\omega$。

14. 就自然顺序而言，区间（0，1）是一个线性序集，请举出（0，1）的一个可数敛尾子集。

15. 设A与B分别代表所有的可数孤立数与所有的可数极限数，证明A与B都是$W(\omega_1)$的敛尾子集。

*16. 由良序定理证明Tukey引理。

第二章　拓扑空间

本章将介绍一般拓扑空间的基本概念以及在给定集合上建立拓扑结构的各种方法。这些概念是非常抽象的，为了使初学者在接受这些抽象概念时不至于感到过于突然与困难，我们首先安排了欧几里得平面这一节，对平面上的点列收敛与各类重要点集作一番复习，其目的在于为新的理论提供一个背景。选欧几里得平面作背景，优点在于它简单、直观。十九世纪末，*G·Cantor* 开创的集合论，为现代数学开辟了广阔的舞台，事实上，*Cantor* 的工作其主要发源地就是欧氏空间，不仅包括这种空间上的集合理论，而且包括了这种空间的拓扑结构。二十世纪初，由于*M·Frechet*、*F·Riesz*、*F·Hausdorff* 以及 *C·Kuratowski*、*R·L·Moore* 等数学家的共同工作，创造性地把拓扑结构推广引入到抽象的集合上来，建立了拓扑空间理论，其中*F·Hausdorff* 的工作尤为出众。本章的最后几节，将从不同的方面给空间提出一些限制性条件，这是因为空间越广泛内容就越贫乏。当我们对一般拓扑空间加上某些限制之后，它就与数学中已经出现且为我们所熟悉的各种具体空间更接近了，从而使我们能够对这些空间以及它们的各种性质从本质上有更深刻的理解。

§1　欧几里得平面

我们按习惯把欧几里得平面记作 E^2，E^2 的点是以实数

作坐标的二元序偶。设$p=(x,\ y)$与$q=(x',\ y')$是E^2的两点，于是有唯一确定的非负实数

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

叫做p到q的距离，记作

$$\rho(p,\ q)=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}。$$

在这里ρ是以二元序偶$(p,\ q)$为变元的非负实值函数，并且满足下列三条性质：

(1) $\rho(p,\ q)=0$的充要条件是$p=q$；

(2) $\rho(p,\ q)=\rho(q,\ p)$；

(3) $\rho(p,\ q)\leqslant\rho(p,\ t)+\rho(t,\ q)$。

在数学分析中，点列的收敛是一个极重要的基本概念，点列$\{p_i\}$收敛于点p，就其直观的通俗的含义来说，就是p_i距p可以无限地接近，要多近可以有多近，只需i充分地大。E^2上具有距离结构，自然就有了远近关系，从而借助距离概念定义了收敛：

点列$\{p_i\}$收敛于点p是指对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在N，使得$\rho(p_i,\ p)<\varepsilon$对一切$i\geqslant N$恒成立。

关于收敛，有一系列的重要性质，例如：常列收敛；收敛序列必是基本列（Cauchy列）；……等。回顾一下这些性质的证明，我们就会发现证明中涉及到的不外乎是距离ρ的三条基本性质。

设p是E^2的一点，ε是任意正数，用$S(p;\ \varepsilon)$表示中心在p半径是ε的圆形区域，即

$$S(p;\ \varepsilon)=\{q:\rho(p,\ q)<\varepsilon\},$$

称做p的ε—邻域。平面上的集合U如果包含了p的某个ε—邻域，那么我们就称U是p的邻域。把p的所有的邻域记作$\mathscr{U}(p)$，叫

做p的邻域系，容易证明$\mathscr{U}(p)$具有下列基本性质：

(1) $E^2\in\mathscr{U}(p)$；

(2) 若$U\in\mathscr{U}(p)$，则$p\in U$；

(3) 若$U\in\mathscr{U}(p)$，$U\subset W$，则$W\in\mathscr{U}(p)$；

(4) 若U，$V\in\mathscr{U}(p)$，则$U\cap V\in\mathscr{U}(p)$；

(5) 若$U\in\mathscr{U}(p)$，则存在V，使得$p\in V\subset U$，并且对于任意的$q\in V$，恒有$V\in\mathscr{U}(q)$。

我们可以用邻域的概念来刻划收敛，同时也可以用收敛概念来刻划邻域，就这个意义上来说，邻域与收敛所起的作用是等价的。我们不难得到以下结果：（请读者作为练习证明一下）

结果1 点列$\{p_i\}$收敛于p的充要条件是：对于任意一个$U\in\mathscr{U}(p)$，存在N，使$p_i\in U$对一切$i\geqslant N$恒成立。

结果2 集U是p的邻域的充要条件是对于每一个收敛于的点列$\{p_i\}$，都存在自然数N，使得$i\geqslant N$时，$p_i\in U$。

若U是p的邻域，我们称p是U的内点。若U是其每一点的邻域，那么U称作**开集**。换言之，**每一点都是其内点**的集叫开集。注意到邻域系$\mathscr{U}(p)$的基本性质（5），我们可以借助开集的概念来刻划邻域，从而说明开集与邻域所起的作用也是等价的。

结果3 集U是p的邻域，其充要条件是存在开集V，使得$p\in V\subset U$。

我们再介绍几种起同样作用的重要点集。

若集F的余集是开集，则称F是**闭集**。那么，开集的余集是闭集，而闭集的余集是开集，开集与闭集有互余关系。

开集有基本性质：

(1) $\varnothing$与E^2本身是开集；

(2) 有限多个开集的交是开集；

(3) 任意多个开集之并是开集。

根据 *De Morgan* 公式容易得到闭集的基本性质：

(1) $\varnothing$与E^2是闭集；

(2) 有限多个闭集之并是闭集；

(3) 任意多个闭集之交是闭集。

对于E^2的一点p和集A，我们定义：

$$\rho(p, A) = \inf\{\rho(p, q) : q \in A\}$$

叫做p到A的距离，显见，若 $p \in A$，自然有 $\rho(p, A) = 0$，但反之不真。

我们把集$\overline{A} = \{p : \rho(p, A) = 0\}$叫做$A$的闭包，而$\overline{A}$中的每个点 p都叫做A的附贴点。于是，$p \in \overline{A}$的充要条件是对每一个n存在$p_n \in A$，使得$\rho(p, p_n) < \frac{1}{n}$，换言之，$p$是$A$的附贴点，其充要条件是$A$中有点列$\{p_i\}$收敛于$p$。

特别，若$\overline{A} = E^2$，则称A是E^2的稠密子集。

以下事实是显然的。

开圆$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$是开集，但不是闭集；

闭圆$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$是闭集，但不是开集；

但是有：　$\overline{A} = \overline{B} = B$

平面E^2中开线段$L = \{(x, 0) : |x| < 1\}$既不开又不闭，$\overline{L} = \{(x, 0) : |x| \leqslant 1\}$。

有理点集 $D = \{(x, y) : x$与y皆是有理数$\}$既不开又不闭，但D是E^2的可数稠密子集。

我们把集合A与其闭包$\overline{A}$的这一对应可以看成是$P(E^2)$到其自身中的一个映射，叫做闭包算子，其中$P(E^2)$表示E^2的全

体子集。显然，这个算子是单调递增的，即$A\subset B$，必有$\overline{A}\subset B$
应该注意，$\overline{A}\subset\overline{B}$并不能保证$A\subset B$。

闭包算子有如下基本性质：

(1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$

(2) $A\subset\overline{A}$

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(4) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

(1) ～ (3) 的证明都是显然的，我们这里特别给出$\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$的一种证明方法：

设$p\in\overline{\overline{A}}$，于是存在$p_n\in\overline{A}$，$\rho(p,\ p_n)<\frac{1}{n}$，而对于每一个$p_n\in\overline{A}$，又存在$q_m^{(n)}\in A$，使$\rho(p_n,\ q_m^{(n)})<\frac{1}{m}$，可以看出：$q_n^{(n)}\in A$且

$$\rho(p,\ q_n^{(n)})\leqslant\rho(p,\ p_n)+\rho(p_n,\ q_n^{(n)})<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$$

这说明A中有点列$\{q_n^{(n)}\}$收敛于p，所以，$p\in\overline{A}$，这就证明了$\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$。

这里用到的方法，叫做“对角线法”，应该引起注意的是在这个例子里，不同的n，点列$\{q_m^{(n)}\}$各自向p_n收敛的速度是一致的，统统是

$$\rho(p_n,\ q_m^{(n)})<\frac{1}{m}\qquad n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

这种一致性是非常重要的，破坏了这一点，就不足以保证$\{q_n^{(n)}\}$向p收敛。例如：第n列$\{q_m^{(n)}\}$按$\rho(p_n,\ q_m^{(n)})<\frac{n}{m+n}$收敛，显然有：$\{q_m^{(n)}\}\to p_n$，但是，不能保证$\{q_n^{(n)}\}$收

敛于p。因为

$$\rho(p, q^{(n)}_{n})\leqslant\rho(p, p_n)+\rho(p_n,q^{(n)}_{n})<\frac{1}{n}+\frac{n}{n+n}=$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{2}$$

E^2中还有许多类型的重要的点与集，我们不再一一介绍了，对已介绍的收敛、邻域、开集、闭集、闭包之间，如何以一个去刻划另一个，也不再赘述，因为在以后几节中这些术语又将再次登场，不同的是，舞台不再是E^2，而是在更广泛的舞台——拓扑空间。

E^2本身有两个特殊性，其一是E^2的点虽不是实数，但却是以实数为坐标的二元序对；其二是E^2的两个点$p=(x, y)$，$q=(x', y')$间的距离$\rho(p, q)$的规定也是过于特殊

$$\rho(p, q)=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}。$$

为了概括数学中的很多具体对象，可作如下推广。

设X是一个集合，ρ是定义在$X\times X$上的一个非负实值函数，并且满足下列条件，对于任意的x、y和$z\in X$

(1) $\rho(x, y)=0$　　当且仅当 $x=y$

(2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$

(3) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$ （三角形不等式）

其中$X\times X=\{(x, y): x, y\in X\}$是$X$与自身的直积，条件（1）～(3) 叫做度量三公理，ρ叫做X上的度量或距离函数，$\rho(x, y)$叫做x到y的距离，具有距离结构的集合叫做度量空间，记作（X, ρ）。

在上述定义中，若把条件（1）

$$\rho(x, y)=0\longleftrightarrow x=y$$

换成条件（1）′

$$x = y \longrightarrow \rho(x, y) = 0$$

那么相应的ρ就叫做伪度量，（X，ρ）叫做伪度量空间。

以下举几个例子。

例 1 n维欧几里得空间E^n是度量空间。

E^n中的点是有序的n元实数组，对于任意点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，距离定义为

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

（1）、（2）成立是显然的。（3）成立即要证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

若令$a_i = x_i - z_i$，　$b_i = z_i - y_i$，则上式为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

为此只须证明

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

也就是要证明 *Cauchy* 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

为此，考虑二次多项式

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \lambda + b_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

由于$P(\lambda)\geqslant 0$，于是判别式满足

$$\triangle=4\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\leqslant 0$$

由此就推出了 *Cauchy* 不等式。这样就完成了ϱ是度量的证明。

例2 *Hilbert* 空间E^∞

E^∞中的点是实数序列$x=\{x_n\}$，其中$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$是收敛的。点$x=\{x_n\}$与点$y=\{y_n\}$的距离定义为

$$\varrho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

以下只验证一下三角形不等式，其它二条件是明显的。首先说明一下$\varrho(x, y)$是非负实值函数。

事实上，从E^n中三角形不等式知道，对于点$(x_1,\cdots,x_n)$、$(0, \cdots, 0)$,$(y_1, \cdots, y_n)$有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这个不等式对任意自然数n都是成立的，那么令$n\to\infty$时，由于$\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2$和$\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2$是收敛的，就能推出$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$收敛，这就说明了$\varrho(x, y)$是一个非负实值函数。

其次，由不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(x-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

当$n\to\infty$时，取极限即得到（3），这就说明 *Hilbert* 空间E^∞

是一个度量空间。

例3　为了便于研究连续函数序列的一致收敛性，我们可以建立这样的函数空间：

$$X = \{ x(t) : x(t)是a \leqslant t \leqslant b上的实值连续函数 \}$$

其上两点 $x(t)$与$y(t)$ 间的距离为

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$$

不难验证 (X, ρ) 是一个度量空间。

这个例子说明对函数序列的一致收敛的研究可以纳入到度量空间中去。

例4　散度量空间

设X是任意集合，X中任意两点x，y的距离规定为

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & 当 \quad x = y时; \\ 1, & 当 \quad x \neq y时。 \end{cases}$$

上式显然满足距离三条件，从而使X成为度量空间，这个空间叫做散空间。

从上边的例子可以看到推广E^2以后得到的度量空间比E^2已广泛得多了，而且令人欣慰的是，在E^2上所设立的收敛、邻域、开集、闭集、闭包等概念以及有关的种种结论，几乎可以不加改动地完全照搬到度量空间上来（读者可以做为一个练习做一下，是很有意义的）。但是，我们的目标是建立比度量空间更广泛的一类空间——拓扑空间。度量空间对我们依然是过于局限和特殊，其特殊之处在于它具有距离结构。距离固然是刻划远近的一种非常好的手段，但它并非必需，不久我们就会看到，确有许多空间其上的远近关系不必要甚至根本不可能用距

离来刻划。

§2 拓扑空间的基本概念

定义 1 设X是一个集合，$\mathscr{T}$是X的一个子集族，它满足以下条件：

(1) $\varnothing$与$X\in\mathscr{T}$；

(2) 若U_1，$U_2\in\mathscr{T}$，则$U_1\cap U_2\in\mathscr{T}$；

(3) 若$U_i\in\mathscr{T}$，$i\in I$ 其中指标集I有限或无限，则$\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\mathscr{T}$。

此时我们称$\mathscr{T}$是X上的一个拓扑（*Topology*），并把$\mathscr{T}$中的元素称做开集（*open set*），把具有拓扑结构的集X叫做拓扑空间（*Topological space*），记为（X，$\mathscr{T}$）或简记作空间X。

例 5 在度量空间（X，ρ）中，由度量ρ诱导出的集族$\mathscr{T}=\{U:U\subseteq X$，当$p\in U$时，存在$S(p;\varepsilon)$，使$p\in S(p;\varepsilon)\subset U\}$（其中$S(p;\varepsilon)=\{x\in X:\rho(x,\ p)<\varepsilon\}$）就是$X$上的一个拓扑，我们通常说度量空间是拓扑空间，即是指上述意义。

例 6 对任意一个集合X，可以取$\varnothing$与X组成拓扑，它所含开集最少，叫做粘拓扑，也可以取一切子集组成拓扑，它所含开集最多，叫做散拓扑。

对同一集合，可以赋予不同的拓扑以构成不同的拓扑空间。两个不同的拓扑并不一定可以按包含关系比较大小，特别当$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$时，说$\mathscr{T}_1$比$\mathscr{T}_2$粗（小），或说$\mathscr{T}_2$比$\mathscr{T}_1$细（大），这就是说，集合$X$上的所有拓扑，按“$\subset$”形成半序关系，粘拓扑、散拓扑分别是最小元、最大元。

定义 2 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，x是X中的点，而$U\subset X$，若存在$V\in\mathscr{T}$，使得$x\in V\subset U$时，则称U是x的邻域（*neighborhood*）。

由定义可知，开集是其自身每一点的邻域，叫做开邻域。一点的邻域未必是开邻域，但必须包含该点的一个开邻域。

在粘空间中，一个点x仅有一个邻域，即X本身；在散空间中，含点x的任意集合都是x的开邻域，特别单点集$\{x\}$是x的开邻域；在实数空间中，U是x的邻域的充要条件是U包含着某个开区间$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$作为它的子集，这时$x$的邻域未必全是开的。

以后用$\mathscr{U}(x)$表示点x的所有邻域，叫做x的邻域系。

定理2.1 设$(x, \mathscr{T})$是拓扑空间，x是其任意一点，则邻域系$\mathscr{U}(x)$具有如下性质：

(1) $X\in\mathscr{U}(x)$；

(2) 若$U\in\mathscr{U}(x)$，$U\subset W$，则$W\in\mathscr{U}(x)$；

(3) 若U、$V\in\mathscr{U}(x)$，则$U\cap V\in\mathscr{U}(x)$；

(4) 若$U\in\mathscr{U}(x)$，则存在V，使$x\in V\subset U$，且对于每一个$y\in V$，有$V\in\mathscr{U}(y)$。

证明 (1) 与 (2) 可直接由邻域的定义推出。(3) 的证明主要是利用开集的性质 (2)。事实上，假设U与$V\in\mathscr{U}(x)$，那么存在开集U^*、V^*，使

$$x\in U^*\subset U;\quad x\in V^*\subset V$$

根据开集性质 (2)，$U^*\cap V^*$是开集，有

$$x\in U^*\cap V^*\subset U\cap V$$

所以$U\cap V$便是x的邻域。

最后，我们来证明 (4)：

由于$U\in\mathscr{U}(x)$，可知存在开集V，使

$$x\in V\subset U$$

由于V是开集，故对于每一个 $y\in V$，V是y的邻域，即$V\in\mathscr{U}(y)$。从而（4）成立。

〔证完〕

定理2.2 设$(x,\ \mathscr{T})$是拓扑空间，而A是X的子集，则A是开集的充要条件是A是其所含的每一点的邻域。

证明 关于必要性前边已经讲过了，现在来证明充分性。由于对$x\in A$，A是x的邻域，则存在开集V_x，使$x\in V_x\subset A$，故$A=\bigcup\limits_{x\in A}V_x$。所以$A$是开集。

〔证完〕

定义 3 设$(x,\mathscr{T})$是拓扑空间，而$A\subset X$，当A的余集是开集时，称A为闭集(*closed set*)。

由定义可知，一个集合是开集，其充要条件是该集的余集是闭的。应用*De Morgan*公式容易证明关于闭集的三条基本性质。这些性质是与开集的性质相呼应的。

定理2.3 设$\mathscr{F}$是拓扑空间的闭集族，则

（1）$\varnothing$、$X\in\mathscr{F}$；

（2）若F_1，$F_2\in\mathscr{F}$，则$F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$；

（3）若$F_i\in\mathscr{F}$，$i\in I$，则$\bigcap\limits_{i\in I}F_i\in\mathscr{F}$。

定义 4 设$(x,\ \mathscr{T})$是拓扑空间，而$A\subset X$，我们把包含A的所有闭集之交称做A的闭包(*closure*)，记作$\overline{A}$，即$\overline{A}=\bigcap\{F:F\text{是闭集},\ A\subset F\}$。$\overline{A}$中的点叫做$A$的附贴点（或接触点）。

由定义可知，$\overline{A}$是闭集，且是包含A的最小闭集。不难证明，

拓扑空间的一个子集F是闭集的充要条件是$\overline{F}=F$。于是又可推出U是开集的充要条件是$\overline{X-U}=X-U$。

集与集的闭包可以看作是一种对应关系。即设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间，而$P(X)$表X的一切子集，那么对任意的$A\in P(X)$，都有唯一的集$\overline{A}\in P(X)$与之对应，此对应称之为闭包算子。

定理2.4 对任意一个拓扑空间来说，集和集的闭包的对应"$-$"：$P(X)\to P(X)$具有下列性质：

(1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$；

(2) $A\subset\overline{A}$；

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(4) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$。

证明 因$\varnothing$是闭集，故(1)成立。

(2) 由定义可知。

关于(3)的证明，首先证明闭包算子具有单调递增性质，即

$$A\subset B\longrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}。$$

事实上，因为$\overline{A}$是包含A的最小闭集，由$A\subset B\subset\overline{B}$，知$\overline{B}$是包含$A$的闭集，故

$$\overline{A}\subset\overline{B}。$$

应用单调性，因为

$$A\subset A\cup B；\ B\subseteq A\cup B$$

所以 $$\overline{A}\subset\overline{A\cup B}；\ \overline{B}\subset\overline{A\cup B}$$

从而 $$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$$

另一方面，由(2)有

$$A\subset\overline{A}；\ B\subset\overline{B}$$

$$A\cup B\subset A\cup B$$

而 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是闭集，且包含 $A\cup B$，故

$$\overline{A\cup B}\subset A\cup\overline{B}$$

综合上述得 $A\cup B=\overline{A}\cup\overline{B}$

关于（4），因为 $\overline{A}$ 是闭集，所以 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$。

〔证完〕

定理2.5 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$x\in X$，$A\subset X$，则 x 是 A 的附贴点的充要条件是 x 的每一个邻域与 A 相交。

证明 必要性。若不然，即存在开集 $U\in\mathscr{U}(x)$，使 $U\cap A=\phi$。于是有

$$A\subset X-U$$

由于 $X-U$ 是闭集，则

$$\overline{A}\subset X-U$$

从而 $x\in U$ 不是 A 的附贴点，矛盾。

充分性。若不然，$x\overline{\in}\overline{A}$。于是 $x\in X-\overline{A}$，而 $X-\overline{A}$ 是开集，它便成为 x 的一个与 A 不相交的开邻域。矛盾。

〔证完〕

定义 5 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A\subset X$，若点 x 的每一个邻域都含有 $A-\{x\}$ 中的点，则称 x 是 A 的聚点（*accumulation point*）。A 的所有聚点之集叫做 A 的导集（*derived set*），记作 A'（或 A^d）。

我们把聚点与附贴点做一个比较：

$X\in\overline{A}\Longleftrightarrow x$ 的每个邻域都含有 A 的点，

$X\in\overline{A}\Longleftrightarrow x$ 的每个邻域都含有 $A-\{x\}$ 的点。

显然， $A'\subset A$

定理2.6　　$\overline{A}=A\cup A'$

证明　根据上面的讨论，有

$$A\cup A'\subset\overline{A}$$

为了证明$\overline{A}\subset A\cup A'$，设$x\in\overline{A}$，于是$x$的每一个邻域$U_x$都与$A$相交。因为$A=(A-\{x\})\cup\{x\}$，所以或者有$x\in A$，否则每个$U_x$中含有$A-\{x\}$的点，后者即$x\in A'$，从而$x\in A\cup A'$，即$\overline{A}\subset A\cup A'$。

〔证完〕

此外还有许多明显的结论，留待读者自己证明，它们是：

$A\cup A'$是闭的；

A是闭集的充要条件是$A'\subset A$；

$\varnothing'=\varnothing$；

$x\overline{\in}\{x\}'$；

若$A\subset B$，则$A'\subset B'$；

$(A\cup B)'=A'\cup B'$。

我们不难看出，粘空间中的任意一点x是除了$\varnothing$和$\{x\}$外每一个集的聚点，同时又是每一个非空子集的附贴点，散空间中每一点不是任何一个集的聚点。在实数空间中，情况比较复杂，要随集而异，这是我们在数学分析中就已熟悉的。

定义 6　在拓扑空间中，若A是x的邻域，则称x是A的**内点**(*interior point*)，集A的所有内点之集叫做A的**内部**(*interior*)，记作A°(或A^{i})。

由于对每一点$x\in A^{\circ}$来说，A是x的邻域，故存在着开集V，使$x\in V\subset A$，集A便是V中每一点的邻域，所以V中每一点都是A的内点，即$x\in V\subset A^{\circ}$，这样就说明了A°是其自身每一点的邻域，故A°是开集。因为包含于A的每一开集中的点都是A的

内点，故A°是包含于A的最大开集。进而可以推出：A为开集的充要条件是$A=A^\circ$。

除去上述基本概念之外，其它的我们只作如下罗列。关于它们的性质以及相互间的联系我们不再讨论。

定义 7 集A的外点(*exterior point*)是指$X-A$的内点，集A的外点全体叫做A的外部(*exterior*)，记作A^e。

定义 8 一个点x，当它既不是A的内点，又不是A的外点时，则称x是A的边界点，集A的边界点的全体叫做A的边界(*boundary*)，记作A^b。

显然，$A^b=(X-A)^b$

在拓扑空间X中，对于每一集合A，都可以将X分成互不相交的三部分

$$X=A^\circ \cap A^b \cup A^e$$

若X是个粘空间，我们容易看出：

$X^\circ=X$；　若$A\subset X$、$A\neq X$，则$A^\circ=\varnothing$

若$A\subset X$、$A\neq \phi$，则$\overline{A}=X$　此外，$\varnothing^b=X^b=\varnothing$，而当$A\subset X$、$A\neq\varnothing$、$A\neq X$时，则$A^b=X$。

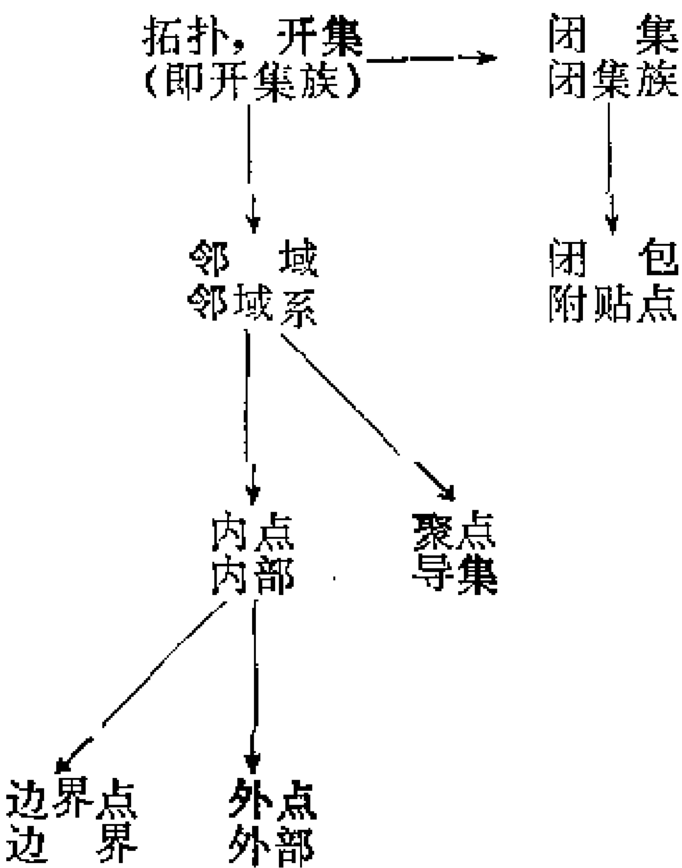
若X是个散空间，我们容易看出：

$A^\circ=\overline{A}=A$；$A^b=\varnothing$。

若X是实数空间，则又随集而异了。例如当A为整数集时，则有$A^\circ=\varnothing$，$\overline{A}=A$，而$A^b=A$；当$A=[a,b]$，则有$A^\circ=(a,b)$，$\overline{A}=A$，而$A^b=\{a,b\}$；当A为有理数集，则有$A=\varnothing$，$(A^\circ)^-=\varnothing$，$\overline{A}=X$，$(A^-)^\circ=X$，$A^b=X$。

从上面的叙述中，我们可以发现闭包运算与内部运算二者相互是不可以交换运算顺序的。

至此，我们对于拓扑空间的诸多基本概念已经作了初步介绍，这里不妨把我们引入这些概念的路线综合成下面这样一个示意图：



如果我们再把上面介绍过的用一个概念去刻划另一个概念的有关定理（如定理 2，定理 5 等）以及明显的事实都用箭头→表示在这个示意图中，细心的读者将会发现，这是一张“四通八达”的线路图，即任何两个概念之间都会有一往一返的箭头，这一事实告诉我们，如果任意选定一个概念做为出发点，则其余的概念就随之而定了，换句话说，即在一个集合上建立拓扑结构的方法是多种多样的，在下一节我们将详细的讨论。

§ 3　建立拓扑的基本方法

在上节，我们介绍了在集合上建立拓扑结构的一种方法，即指定开集族（满足条件（1）～（3））。当开集族确定了之

后，那么邻域、闭集、闭包……也就全都确定了。在这一节里我们将介绍其它一些方法，例如指定邻域系的方法，指定闭包算子的方法，……。正象上一节末尾指出的那样，我们可以将§的中介绍过的无论哪一个基本概念取做出发点，都能按照示意图（§2）中四通八达的路线走下去，使这个出发点是决定一切，的并且不会引起概念上的混乱。

以下首先从邻域概念开始，*Hausdorff*定义拓扑空间就是用的邻域概念。

（一）设X是一个集合，若对每一点$x\in X$，都有一个子集族$\mathscr{U}(x)$与x对应，并且满足以下条件：

①$X\in\mathscr{U}(x)$

②若$U\in\mathscr{U}(x)$，$U\subset W$，则$W\in\mathscr{U}(x)$；

③若U，$V\in\mathscr{U}(x)$，则$U\cap V\in\mathscr{U}(x)$

④若$U\in\mathscr{U}(x)$，则存在V，使$x\in V\subset U$，并且对于V中每一点y，有$V\in\mathscr{U}(y)$。

那么集族

$\mathscr{T}=\{A: A\subset X$且对每一个$x\in A$，$A\in\mathscr{U}(x)\}$

便是X上的一个拓扑（即$\mathscr{T}$满足开集族条件（1）～（3）），并且$\mathscr{U}(x)$恰好是拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）中点x的邻域系。

证明 首先验证$\mathscr{T}$满足开集族条件（1）～（3）。

（1） 显然，$\phi\in\mathscr{T}$，又由①知$X\in\mathscr{T}$。

（2）设U、$V\in\mathscr{T}$，当$x\in U\cap V$时，那么由于$x\in U$，$x\in V$，便知$U\in\mathscr{U}(x)$、$V\in\mathscr{U}(x)$，于是根据③，$U\cap V\in\mathscr{U}(x)$，从而$U\cap V\in\mathscr{T}$。

（3） 设$U_i\in\mathscr{T}$，其中 $i\in I$，那么当$x\in\bigcup\limits_{i\in I}U_i$时，$x$属于

某个U_{i_0}，($i_0\in I$)。因此按照$\mathscr{T}$的取法便知$U_{i_0}\in\mathscr{U}(x)$，又根据②，$\bigcup_{i\in I}U_i\in\mathscr{U}(x)$。故$\bigcup_{i\in I}U_i\in\mathscr{T}$。

其次再证明$\mathscr{U}(x)$恰好是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中点x的邻域系。我们以$\mathscr{U}^*(x)$表示由拓扑$\mathscr{T}$决定的x的邻域系，即$\mathscr{U}^*(x)=\{U:$ 存在$V\in\mathscr{T}$,使$x\in V\subset U\}$。就要证明$\mathscr{U}(x)=\mathscr{U}^*(x)$。

事实上，对每一个$U\in\mathscr{U}^*(x)$，由定义可知，存在$V\in\mathscr{T}$，使$x\in V\subset U$，又根据$\mathscr{T}$的取法，$V\in\mathscr{U}(x)$。于是再依②，可知$U\in\mathscr{U}(x)$。另一方面，对每一个$U\in\mathscr{U}(x)$，则根据④，存在V，使$x\in V\subset U$，且对于每一个$y\in V$，$V\in\mathscr{U}(y)$，于是，$V\in\mathscr{T}$，从而$U\in\mathscr{U}^*(x)$

综上述，$\mathscr{U}(x)=\mathscr{U}^*(x)$。

〔证完〕

下面由闭集概念出发。

（二）设X是一个集合，若$\mathscr{F}$是X的一个子集族，且满足条件：

① ϕ、$X\in\mathscr{F}$

① 若F_1、$F_2\in\mathscr{F}$，则$F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$

③ 若$F_i\in\mathscr{F}$，其中$i\in I$，则$\bigcap_{i\in I}F_i\in\mathscr{F}$。那么由$\mathscr{F}$得到的集族：

$$\mathscr{T}=\{U:\ X-U\in\mathscr{F}\}$$

便是X上的一个拓扑，并且$\mathscr{F}$恰好是空间$(X,\mathscr{T})$的闭集族。

证明 从略。

我们还可以从闭包算子概念出发引入拓扑。这是*Kuratowski*的方法。

（三）设X是一个集合，$P(X)$表示X的一切子集，若算子

“c”：$P(X) \to P(X)$满足以下条件：

①$\phi^c = \phi$；

②$A \subset A^c$；

③$(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$；

④$A^{cc} = A^c$，

则由“c”确定的集族

$$\mathscr{T} = \{ U: (X-U)^c = X-U \}$$

是X上的一个拓扑，并且，对$A \subset X$，A^c恰好是空间$(X, \mathscr{T})$中集A的闭包$\bar{A}$。

注 条件①—④叫做kuratowski闭包公理，满足公理的算子“C”则叫kuratowski闭包算子。

证明 首先证明$\mathscr{T}$是拓扑。

i)根据②，有

$$(X-\phi)^c = X^c = X = X-\phi$$

就说明了$\phi \in \mathscr{T}$。

又根据①，有

$$(X-X)^c = \phi^c = \phi = X-X$$

又说明$X \in \mathscr{T}$

ii) 设$U_1 \in \mathscr{T}$ $U_2 \in \mathscr{T}$，于是有

$(X-U_1)^c = X-U_1$；$(X-U_2)^c = X-U_2$

根据③，有

$$\begin{aligned}(X-U_1 \cap U_2)^c &= [(X-U_1) \cup (X-U_2)]^c \\ &= (X-U_1)^c \cup (X-U_2)^c \\ &= (X-U_1) \cup (X-U_2) \\ &= X-U_1 \cap U_2\end{aligned}$$

这就说明了$U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}$。

iii) 由③推出算子c是单调递增的，事实上，设$B\subset A$，于是$A=A\cup B$，依③

$$B^c\subset A^c\cup B^c=(A\cup B)^c=A^c$$

再设$U_i\in\mathscr{T}$，其中$i\in I$，I是任意一个标号集。由定义有

$$(X-U_i)^c=X-U_i \qquad (i\in I)$$

于是由于

$$X-\bigcup_{i\in I}U_i\subset X-U_i$$

则有 $$(X-\bigcup_{i\in I}U_i)^c\subset(X-U_i)^c=X-U_i$$

进而有 $$(X-\bigcup_{i\in I}U_i)^c\subset\bigcap_{i\in I}(X-U_i)=X-\bigcup_{i\in I}U_i$$

另外，由于

$$X-\bigcup_{i\in I}U_i\subset(X-\bigcup_{i\in I}U_i)^c$$

故有 $$(X-\bigcup_{i\in I}U_i)^c=X-\bigcup_{i\in I}U_i$$

这样就说明了$\bigcup_{i\in I}U_i\in\mathscr{T}$。

其次，再证明$A^c=\overline{A}$。我们知道：

$$\overline{A}=\bigcap\{F:X-F\in\mathscr{T},\ A\subset F\}$$
$$=\bigcap\{F:F^c=F,\ A\subset F\}$$
$$=\bigcap\{F:F^c=F,\ A^c\subset F\}$$

显然，有 $A^c\subset\overline{A}$。

另一方面，依 $A^{cc}=A^c$及$A\subset A^c$，则

$$A^c\in\{F:F^c=F,\ A\subset F\}$$

因此有

$$\overline{A}=\bigcap\{F:F^c=F,\ A\subset F\}\subset A^c$$

故 $A^c=\overline{A}$

〔证完〕

（四）设X是一个集合，若算子i：$P(X)\to P(X)$满足下列条件。

①$X^i=X$；

②$A^i\subset A$；

③$(A\cap B)^i=A^i\cap B^i$；

④$A^{ii}=A^i$；

则族$\mathscr{T}=\{U: U^i=U\}$是X上的一个拓扑，并且对任意的$A\subset X$，A^i恰好是空间（X，$\mathscr{T}$）中集A的内部A°。

证明 从略。

还有建立拓扑结构的其它一些方法（例如从导集出发的F.Riesz方法），我们不再赘述，留待读者自行思考。在我们介绍了基底、子基底、邻域基以及Moore－Smith收敛等基本概念之后，还会再遇到一些确定拓扑的方法。

以上的讨论说明了开集、闭集、闭包、内部、收敛等各概念对于拓扑空间的作用是相互等价的，凡上述某一类基本点集给定了之后，空间的全部结构也就随之一意地确定了，只是在不同的情况下，为了方便起见，我们选取适当的一种作为工具来刻划空间的拓扑结构。

下边给出几个用不同的方法构造拓扑空间的例子。

例7 设X是一无限集，$\mathscr{F}$是由X的一切有限子集与X本身组成的集族，容易验证以$\mathscr{F}$作闭集族便确定了X上的一个拓扑$\mathscr{T}$。

例8 X是一无限集，x_0是X中确定的一点，

令

$$\overline{A}=\begin{cases}A, & A\text{是有限集}\\ A\cup\{x_0\}, & A\text{是无限集}\end{cases}$$

这样确定的拓扑$\mathscr{T}$是由下列子集组成的：所有有限集的余集以及所有不含x_0的子集。在这个拓扑空间中，单点集都是闭集，而除$\{x_0\}$外的所有单点集又都是开集。

当然，我们还可以通过别的方法构造上述拓扑：

令

$$A^\circ=\begin{cases}A & X-A\text{是有限集}\\ A-\{x_0\} & X-A\text{是无限集}\end{cases}$$

例9　X是一个势大于1的集合，令

$$\overline{A}=\begin{cases}A & A=\varnothing\\ A\cup\{x_0\} & A\neq\varnothing\end{cases}$$

（其中x_0是X中确定的一点）

这样也可以确定一个拓扑$\mathscr{T}$：X以及不含x_0的所有子集。在这个拓扑空间中单点集$\{x_0\}$是闭的但不是开的，而其它单点集都是开的但非闭的，且x_0是每个非空子集的附贴点。

例10　X是一个势大于1的集，M是给定的一个子集，

$$A^\circ=\begin{cases}A, & A=X\\ A\cap M, & A\neq X\end{cases}$$

这样确定的拓扑包含X以及M的所有子集。显然，当$M=\varnothing$时，得到粘拓扑，当$M=X$时，得到散拓扑。

§4　基、子基、邻域基与可数公理

我们曾说过，拓扑空间理论建立的发源地之一就是欧氏空间，因此，我们应该经常回到这块发源地上去寻找背景，接受启发。

回顾一下欧几里得平面的拓扑结构就容易看到开圆$S(p;\varepsilon)$的作用：对E^2中的任意点p及p的邻域U，都存在开圆$S(p;\varepsilon)$使得

$$p\in S(p;\ \varepsilon)\subset U$$

从而，E^2中的每一开集都是某些开圆之并。同时，我们还可以把这种开圆的半径限制在$\frac{1}{n}$，其中n是正整数，这样一来集族

$$\{S(p;\ \frac{1}{n}):p\in E^2,\ n\text{为正整数}\}$$

就成了决定E^2拓扑结构的"基本开集族"，我们甚至还可以把基本开集族取成：

$$\{S(p;\ \frac{1}{n}):p\text{是}E^2\text{中的有理点，}n\text{是正整数}\}$$

这样的开集虽只有可数多个，但是已经足以决定E^2的拓扑结构了。

由此我们可以抽象出一般拓扑空间的基本开集族的概念。

定义9 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间，$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的一个子族，如果对X中每一点x及x的每一个邻域U，都存在某个$B\in\mathscr{B}$，使得

$$x\in B\subset U$$

那么我们称$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的一个基底，简称基（*base*）。

显然，$\mathscr{T}$本身就是一个基。对E^2来说，集族

$$\{S(p;\ \varepsilon):p\in E^2,\ \varepsilon>0\}$$

$$\{S(p;\ \frac{1}{n}):p\in E^2\text{是有理点，}n\text{为正整数}\}$$

都是拓扑基。

定理2.7 在拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中，集族$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$是基的

充要条件是$\mathscr{T}$中每一元素都是$\mathscr{B}$中某些元素之并。

证明 必要性。

首先，$\varnothing$可以看作$\mathscr{B}$中0个元素之并。其次，设$U\in\mathscr{T}$，那么对每一个$x\in U$，存在$B_x\in\mathscr{B}$，使得

$$x\in B_x\subset U$$

于是有 $$U=\bigcup_{x\in U} B_x。$$

充分性。

设$x\in X$及$U\in\mathscr{U}(x)$，于是存在开集V，使得

$$x\in V\subset U$$

由条件有 $$V=\bigcup_{i\in I}B_i \quad (B_i\in\mathscr{B},\ i\in I)$$

就存在 $i_0\in I$，使得

$$x\in B_{i_0}\subset V\subset U$$

这就证明了$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的基。

〔证完〕

当给定空间的一个拓扑基$\mathscr{B}$时，那么$\mathscr{T}$就被唯一地确定了：

$$\mathscr{T}=\{U:U\text{是}\mathscr{B}\text{中某些元素之并}\}$$

用这种方法来确定拓扑是十分简单的，但是应该看到，并不是X中任意子集族都可以充当某个拓扑的基底。例如$X=\{a,b,c\}$，而子集族$S=\{\varnothing,\{a,b\},\{a,c\},X\}$就不可能做$X$的任何拓扑的基。原因在于$\{a,b\}$与$\{a,c\}$的交$\{a\}$不能表示为$S$中某些元素之并。

那么，集X的一族子集$\mathscr{B}$要具备哪些条件才可以做为X上的某个拓扑的拓扑基呢？

定理2.8 设$\mathscr{B}$是X的一个子集族，并且$X=\bigcup\{B:B\in\mathscr{B}$

则$\mathscr{B}$是X上某个拓扑的基的充要条件是：对任意的$U,V\in\mathscr{B}$，若$x\in U\cap V$，则存在$W\in\mathscr{B}$，使得 $x\in W\subset U\cap V$。

证明 必要性。

设$\mathscr{B}$是某个拓扑$\mathscr{T}$的基，若U，$V\in\mathscr{B}$，$x\in U\cap V$，于是$U\cap V\in\mathscr{T}$，由基的定义，存在$W\in\mathscr{B}$，使

$$x\in W\subset U\cap V。$$

充分性。

设$\mathscr{B}$满足题设条件。我们令

$$\mathscr{T}=\{U:U\text{为}\mathscr{B}\text{中某些元素之并}\}$$

我们不难知道$\mathscr{T}$就是所要求的拓扑，故条件是充分的。

〔证完〕

推论 若$X=\bigcup\{B:B\in\mathscr{B}\}$，且$\mathscr{B}$中任意二元之交仍是$\mathscr{B}$中元素，则$\mathscr{B}$是一个拓扑基。

这里我们再降低一下要求，给定X的一个子集族$\mathscr{A}$(无妨认为$\mathscr{A}$满足条件$X=\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}$，否则给$\mathscr{A}$添一个元素$X$)，是否存在$X$上的一个拓扑，使之包含$\mathscr{A}$呢？换言之，是否存在一个拓扑，使得$\mathscr{A}$中元素都是开集呢？如果不加任何限制，结论是显然的，散拓扑就是这样的一个。但是这样的拓扑太平凡了，它包含的开集太多！我们希望得到包含$\mathscr{A}$的、X上的最小拓扑。这样的拓扑存在吗？其结构如何？

为了证明这种拓扑是存在的，我们考虑所有包含$\mathscr{A}$的、X上的拓扑$\mathscr{T}_\alpha$之族：

$$\{\mathscr{T}_\alpha:\alpha\in A\}$$

显然，散拓扑是其中之一。只要我们可以证明$\mathscr{T}=\bigcap\{\mathscr{T}_\alpha:\alpha\in A\}$仍是$X$上的拓扑，显然$\mathscr{T}$就是包含$\mathscr{A}$的最小拓扑了。事实上，$\mathscr{T}$满足拓扑三条件可以这样验证：

(1)由于对每一个$\alpha\in A$，$\varnothing$、$X\in\mathscr{T}_\alpha$，因此，$\varnothing$、$X\in\mathscr{T}$。

(2) 设U, $V\in\mathscr{T}$、显然U、V属于每一个$\mathscr{T}_\alpha$。故$U\cap V$属于每一个$\mathscr{T}_\alpha$，则$U\cap\mathscr{T}V$属于。　　$0=\mathscr{T}$

(3)设$U_i\in\mathscr{T}(i\in I)$，可知对每一个$i\in I$，$U_i$属于每一个$\mathscr{T}_\alpha$，
所以$\bigcup_{i\in I}U_i$属于每一个$\mathscr{T}_\alpha$，则$\bigcup_{i\in I}U_i$属于$\mathscr{T}$。

由上述可知，对X的任意一个子集$\mathscr{A}$族，则包含$\mathscr{T}$的X上最小的拓扑$\mathscr{T}$是由$\mathscr{A}$唯一决定的。下面我们要进一步用构造的方法得到$\mathscr{T}$。

定理2.9　设$\mathscr{S}$是X的一个子集族，且$X=\bigcup\{S:S\in\mathscr{S}\}$，则

$$\mathscr{B}=\{B:B\text{是}\mathscr{S}\text{中有限个元素之交}\}$$

就是X上的某个拓扑的基。该拓扑是包含$\mathscr{S}$的最小拓扑。

证明　因为$\mathscr{B}$中任意二元素之交仍属于$\mathscr{B}$，按定理2.8推论可知$\mathscr{B}$是某个拓扑$\mathscr{T}$的基。并且这个拓扑$\mathscr{T}$是通过先取$\mathscr{S}$中有限个元素之交，然后再取这种交的任意并所获得的。因此必是包含$\mathscr{S}$的最小拓扑。

定义10　设$\mathscr{S}$是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的一个子集族，如果$\mathscr{S}$的有限个元素之交的全体$\mathscr{B}$正好是$\mathscr{T}$的基底，则称$\mathscr{S}$是$\mathscr{T}$的子基底或简称子基(Subbase)。

定理2.9告诉我们，X上的任意子集族$\mathscr{S}$，只要有$X=\bigcup\{S:S\in\mathscr{S}\}$，那么便是$X$的某个拓扑的子基。

实数空间的一个子基是

$\mathscr{S}=\{(-\infty,b):b\text{是有理数}\}\cup\{(a,+\infty):e\text{是有理数}\}$，而$\mathscr{B}=\{(a,b):a,b\text{是有理数}\}$是一个基底，族$\mathscr{S}$与$\mathscr{B}$的势都是可数的。请读者证明一下实数空间不存在有限基。

设X是拓扑空间，我们把

$$w(X)=\min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}\text{是}X\text{的基}\}$$

叫做空间X的权（weight）。

任　　　　　　间的权都是$\aleph_0$。

例11　设K是所有实数之集。

以$\mathscr{B}=\{[x,r):x,r\in K,r>x,r$是有理数$\}$为拓扑基所生成的拓扑空间$K$称做Sorgenfrey直线。

容易看出$|\mathscr{B}|=c$，同时还可以证明$w(K)=c$。

事实上，若$\mathscr{A}$是由某些开集组成的，并且$|\mathscr{A}|<c$，那么一定有点$x_0\in k$不是$\mathscr{A}$中任何元素的下确界。任取有理数$r>x_0$于是$[x_0,r)$是开集，但却不能表示成$\mathscr{A}$中某些元素的并。说明$|\mathscr{A}|<c$的开集族$\mathscr{A}$不可能成为空间K的拓扑基，从而$\omega(K)=c$

定义11　设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间，$\mathscr{U}(x)$是点x的邻域系，如果$\mathscr{U}(x)$的子族$\mathscr{B}_x$满足条件：

对任意给定的$U\in\mathscr{U}(x)$，存在$B\in\mathscr{B}_x$使$B\subset U$。

则称$\mathscr{B}_x$为x的邻域基（或局部基）。特别，当邻域基$\mathscr{B}_x$中的元素全是开集时，称做开邻域基。

例如$\mathscr{U}(x)$本身就是x的一个邻域基。点x的所有开邻域就构成一个邻域基。再如对每一个拓扑基$\mathscr{B}$，则所有含有x的$\mathscr{B}$中的元素亦构成x的一个邻域基。另一方面，若$\mathscr{B}x$是开邻域基，则$\bigcup_{x\in x}\mathscr{B}_x$就是一个拓扑基。

在粘空间中，对每一点x，$\mathscr{U}(x)=\mathscr{B}_x=\{X\}$；在散空间中，对每一点$x$，开邻域基$\mathscr{B}_x$可由单点集$\{x\}$这一个元素组成。在实数空间中，$x$的开邻域基可以取集族

$\{(x-\varepsilon,x+\varepsilon:\varepsilon>0)\}$或$\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}):n$是正整数$\}$。

我们容易证明开邻域基$\mathscr{B}_x$具有如下性质：

①$\mathscr{B}_x \neq \varnothing$，且对任意的$U \in \mathscr{B}_x$，有$x \in U$；

②对任意的U_1，$U_2 \in \mathscr{B}_x$，存在$U \in \mathscr{B}_x$使

$x \in U \subset U_1 \cap U_2$；

③若$y \in U \in \mathscr{B}_x$，则存在$V \in \mathscr{B}_y$，使

$V \subset U$。

我们也不难看出，若对每一点$x \in X$，都给定$\mathscr{B}_x$，且满足上述条件①～③，那么同样可以唯一地确定X上的拓扑$\mathscr{T}$，使得$\mathscr{B}_x$正好是（X，$\mathscr{T}$）中点x的开邻域基。

例12 设 $L = \{(x, y): y \geqslant 0\}$是上半平面的点集，记子集$L_1 = \{(x, y): y = 0\}$，$L_1$的余集 $L_2 = \{(x, y): y > 0\}$。

当$p \in L_1$，我们用$K(p; e)$表示半径为$e > 0$，中心取在L_2中且与L_1相切于p的开圆。把集族$\mathscr{B}_p = \{K(p; \frac{1}{n}) \cup \{p\}: n = 1, 2, \cdots\cdots\}$取做$p$的开邻域基。

当$p \in L_2$，我们用$S(p; e)$表示中心为p、半径为e的开圆，集族$\{S(p; \frac{1}{n}) \cap L: n = 1, 2\cdots\cdots\}$做$p$的开邻域基。

这样确定的拓扑空间L叫 *Niemytzki* 平面，在此空间中，集L_1是闭的。

我们把基数

$\chi(x, X) = \min\{|\mathscr{B}_x|: \mathscr{B}_x$是$x$的邻域基$\}$称之为空间$X$在点$x$处的特征数（*character*）把基数

$$\chi(X) = sup\{\chi(x, X): x \in X\}$$

叫做空间X的特征数。

显然，$\chi(X) \leqslant w(X)$。

当空间$\chi(X) \leqslant \aleph_0$时，就说空间$X$满足第一可数公理，或说$X$是$A_1$型的，其含义是指$X$的每一点都有可数邻域基。

容易看到，如果$\{U_n\}$是x处的可数邻域基，那么令$V_n=\bigcap_{i=1}^{n}U_i$时，就得到X的单调递减的可数邻域基$V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset\cdots\cdots$。

散空间、粘空间、一切度量空间与伪度量空间都满足第一可数公理。

下面举一个不满足第一可数公理的例子。

例13 X是非可数集。

：空集和所有有限集之余集。

我们要证明$(X,\mathscr{T})$不满足第一可数公理。

事实上，假设在点x有可数邻域基$\mathscr{B}_x=\{B_i: i=1,2\cdots\cdots\}$，无妨设每一个$B_i$是开的，注意到

$$X-\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(X-B_i)$$

其中每一个$X-B_i$都是有限集，那么$\bigcup_{i=1}^{\infty}(X-B_i)$就是可数集，因此$\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$是非可数集。任取$a\in\bigcap_{i=1}^{\infty}$且$a\neq x$，那么$X-\{a\}$是$x$的一个开邻域，但是它不包含任意一个$B_i$，这与$\mathscr{B}_x$是邻域基相矛盾。即知$(X,\mathscr{T})$不满足第一可数定理。

当$w(X)\leqslant\aleph_0$时，我们说空间满足第二可数公理，或说是A_2型的，其含义是X具有可数基底。

粘空间、欧氏空间都满足第二可数公理。显然，当一个空间满足第二可数公理时也满足第一可数公理。反之不然，非可数的散空间即是满足第一可数公理而不满足第二可数公理。

第二可数公理是就基本开集的多少这一个侧面对空间提出

的一个限制条件，一个空间受到这个条件的限制必然就有相应的特殊性。下面我们就来讨论A_2型空间的一些特殊性。

定理2.10 若（X，$\mathscr{T}$）是A_2型的，则X具有可数稠密子集。

证明 设$\mathscr{B}$是一个可数基，对每一个$B\in\mathscr{B}$选取一点$a_B\in B$，则

$$\{a_B: B\in\mathscr{B}\}$$

就是X的一个可数稠密子集。

事实上，可数是显然的，只须证： $\bar{A}=X$。

对$x\in X$，及x的任意一个邻域U，由于$\mathscr{B}$是基，故存在$B\in\mathscr{B}$，使得

$$x\in B\subset U$$

由此可知$a_B\in A\cap B\subset A\cap U$

从而 $x\in\bar{A}$

这样 $\bar{A}=X$

〔证完〕

应注意的是，具有可数稠密子集的空间并不一定具有可数基，如前述的例十三。

这一定理的实质是什么？要取X的稠密子集，自然每一开集都得至少取一个点，但实际上并不要求到每个开集中去取，而只需从某个基的每个开集中各取一点就足够了。

我们通常把$d(X)=\min\{|A|: A$是空间X的稠密子集$\}$叫做空间X的密度。上述讨论证明了$d(X)\leqslant w(X)$

定理2.11 设（X，$\mathscr{T}$）是A_2型的，若$A\subset X$，且A是非可数集合，则A中必有一点是A的聚点。

证明 设$\mathscr{B}$是可数基。用反证法。设A中每一点都不是A

的聚点，那么，对于任意一点$x\in A$，存在某个$U_x\in\mathscr{U}(x)$，使得

$$U_x\cap(A-\{x\})=\varnothing$$

又由$\mathscr{B}$是基，故存在$B_x\in\mathscr{B}$，使得

$$B_x\cap A=\{x\}$$

这样就得到了从集A到集族$\{B_x: x\in A, B_x\in\mathscr{B}\}$的一个一一对应，后者的可数性决定$A$是可数的。矛盾。

〔证完〕

定理2.12 (*Lindelöf*) 若$(X,\mathscr{T})$是A_2型的，M是X的子集，则M的每一个开覆盖必有可数子覆盖。

在证明之前，先把有关术语解释一下。集族$\mathscr{A}$叫做M的覆盖，是指

$$M\subset\bigcup\{A: A\in\mathscr{A}\}。$$

若$\mathscr{A}$是M的覆盖，且$\mathscr{A}$中每一元素是开集，则$\mathscr{A}$叫做M的开覆盖。若$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$，且$\mathscr{A}_1$也是$M$的覆盖，则称$\mathscr{A}_1$为$\mathscr{A}$的子覆盖。随着覆盖本身的势为有限或可数，分别称为有限覆盖或可数覆盖。

证明 设$\mathscr{B}=\{B_i: i=1, 2, \cdots\cdots\}$是可数基。又设$\mathscr{A}=\{U_a: a\in A\}$是$M$的开覆盖，那么，$\mathscr{A}$中的每一个元$U_a$，都可以表示为$\mathscr{B}$中某些元素之并

$$U_a=\bigcup_{i\in I_a}B_i$$

从而 $$M\subset\bigcup_{a\in A}\bigcup_{i\in I_a}B_i$$

注意上式右端至多是可数个元，记作

$$\{B_{nk}: k=1, 2\cdots\cdots\}$$

对每个B_{nk}，取一个U_k使得

$$B_{ik}\subset U_k$$

这样$\{U_k: k=1, 2, \cdots\cdots\}$就是$\mathscr{A}$的一个可数子覆盖。

〔证完〕

此证明的实质是这样的：要从$\mathscr{A}$中选子覆盖，由于$\mathscr{A}$中元素可以表示为$\mathscr{B}$中元素之并，$\mathscr{B}$的这些元素就构成了M的覆盖$\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$，再把$\mathscr{B}'$中元素一一放大成$\mathscr{A}$中元素。因此，基$\mathscr{B}$的势就控制了$\mathscr{A}$的子覆盖的势。特别当$|\mathscr{B}|=\aleph_0$时，就是上述定理。

定义12 $(X, \mathscr{T})$叫*Lindelöf*空间，是指X的每一个开覆盖都有可数子覆盖。

从定理2.12容易得出如下推论：

推论 满足第二可数公理的空间一定是 *Lindelöf* 空间。

注意，例十三告诉我们，上述推论不可逆。事实上，例十三中拓扑空间的任何开覆盖都有有限子覆盖，当然是*Lindelöf*空间，但是该空间连第一可数公理都不满足，当然更不满足第二可数公理了。

§5 网

在本章第一节我们已说过，对于E^2这样的拓扑空间，其拓扑结构完全可以用“收敛”来描述，此处的“收敛”是指“点列的收敛”。点列$\{P_i\}$收敛于点P当且仅当对P的每一个邻域U，都存在自然数N，使得$P_i\in U$对一切$i\geqslant N$成立。对一般拓扑空间，沿用这个特征做为点列收敛的定义是很自然的，但困难在于一般拓扑空间的拓扑结构是否照旧可以用“点列收敛”来描述呢？以下几个有趣的例子将给出否定的回答。

例14 X是非可数集，其闭集规定为X本身以及一切可数子集。任取一点$x_0\in X$，令$A=X-\{x_0\}$，显见x_0是A的附

贴点，但是A中没有点列向x_0收敛。

例15 在具有序拓扑的序数空间$[0, w_1]$中，点w_1是集$[0, w_1)$的聚点，但是$[0, w_1)$中任何点列都不收敛于w_1。

注：线性序集X上的序拓扑是以形如

$$\{x\in X: x<a\}, \{x\in X: a<x\} \quad (a\in X)$$

的集合全体为子基构成的拓扑）。

例16 设π是平面上所有的点，按下列方法给定点$P\in\pi$处的开邻域基$\mathscr{B}_p$：

当$P\neq(0, 0)$时，令$\mathscr{B}_p=\{S(P;\frac{1}{n}): n$是自然数$\}$；（其中$S(P;\frac{1}{n})$表示以$P$为中心，$\frac{1}{n}$为半径的开圆）

当$P=(0, 0)$时，令$\mathscr{B}_p=\{\{P_0\}\cup H(i; k_1k_2\cdots\cdots): i, k_1\cdots\cdots$都是自然数$\}$，其中

$$H(i; k_1, k_2, \cdots\cdots)=\bigcup\{S(P_n; \frac{1}{k_n}): n\geqslant i\}$$

$\left(\text{其中}P_n=(\frac{1}{n}, 0)\right)$

这样确定的拓扑$\mathscr{T}$自然比通常欧氏拓扑要细一些，

用$P_{n, m}$代表点$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$，令$A=\{P_{n, m}: n, m$是自然数$\}$，显然，对每个自然数$n$，点列$\{P_{n, m}\}_{m=1, 2\cdots\cdots}$向点$P_n$收敛，而点列$\{P_n\}_{n=1, 2\cdots\cdots}$又向$P_0=(0, 0)$收敛。

我们容易验证$P_0\in\overline{A}$，这是由于P_0的每个邻域都含有A的点；另一方面我们又可以证明A中不存在点列向P_0收敛。实际上，假设A中有点列$\{Q_i\}_{i=1, 2, \cdots\cdots}$向$P_0$收敛，那么在每一条竖直线$\left(x=\frac{1}{n}\right)$上至多有有限个$P_{n, m}$是$\{Qi\}_{i=1, 2}$，的项，所以适当地选取自然数$k_n$，就可以使得$S(P_n;$

$\frac{1}{k_n}$)中不含$\{Qi\}_{i=1,2,\cdots\cdots}$的点，这样得到的$P_0$的邻域

$U=\{P_0\}\bigcup H(1, k_1, k_2, \cdots\cdots)$就与$\{Qi\}_{i=1,2,\cdots\cdots}$不相交，这与$\{Qi\}_{i=1,2}\cdots\cdots$向$P_0$收敛相矛盾。

如上所列举的三个拓扑空间，附贴性都不能用"点列收敛"来描述，换句话说，"点列收敛"对描述一般空间的拓扑结构是不够用的。为了弥补点列收敛的不足，我们引入网和网的收敛（或称 *Moore-Smith* 收敛）。

定义13 若$>$是定义在非空集合D上的二元关系，并且满足条件

（1）若$m>n$，$n>p$ 则$m>p$ （传递性）

（2）若对任意的m，$n\in D$，存在$p\in D$，使得

$p\geqslant m$与$p\geqslant n$

同时成立。（定向性）

则称$>$是D上的一个定向，并把（D，$>$）叫做定向集。

定义14 设（D，$>$）是一个定向集，X是任意一个非空集合，我们把每一个映射$S: D\rightarrow X$叫做X中的一个网（*net*），常常记作

$$S=\{x_n, n\in D, >\}$$

或者简记为 $S=\{x_n, n\in D\}$。

定义15 设（X，$\mathscr{T}$）是拓扑空间，$s\in X$，$S=\{x_n, n\in D\}$是X中的一个网，若对s的任何邻域U，存在$d\in D$，使得$x_n\in U$对满足$n\geqslant d$的一切$n\in D$都成立，则称S收敛于s，而点s叫做网S的一个极限。

一个网可以有许多极限，用$\lim S$或者$\lim x_n$表示S的所有极

限组成之集合，特别当S有唯一极限s时，记作$\lim\limits_{n\in D}x_n=s$。

我们可以举出许许多多定向集以及网的例子，例如（N，$>$）就是一个定向集（其中N是自然数集合）。集X上的每一个点列都是X中的一个网。又如，设X是一个拓扑空间，$x\in X$，$\mathscr{B}_x$表示点x的一个邻域基，显然，$\mathscr{B}_x$依“$\subset$”关系是一个定向集，若从$\mathscr{B}_x$的每个元素U中选取一点$x_U\in U$，于是$\{x_U, U\in\mathscr{B}_x, \subset\}$就是$X$中的一个网，并且向$x$收敛。特别，若$\mathscr{B}_x$是$x$的一个单调下降的可数邻域基时，这样构造的网就是一个向点x收敛的点列。

为了叙述上的方便，我们约定今后凡说网$\{x_n, n\in D\}$在A中，皆指$x_n\in A$对一切$n\in D$均成立；$\{x_n, n\in D\}$终于在A中，皆指$x_n\in A$自某个$d\in D$起对一切$n\geqslant d$均成立；$\{X_n n\in D\}$经常在A中，是指对于任意的$d\in D$都存在$n\geqslant d$使得$x_n\in A$成立。按照这些约定显然有

拓扑空间中网$\{x_n, n\in D\}$收敛于s当且仅当网终于在s的每一个邻域中。

另外，若网$\{x_n, n\in D\}$经常在点s的每一个邻域中，我们则称s是网$\{x_n, n\in D\}$的一个聚点（或极限点）。显然，网的极限必是极限点，但反之不一定成立。

定理2.13 设X是拓扑空间，$A\subset X$，$x_0\in X$，则

（1）x_0是A的附贴点当且仅当A中存在一个网收敛于x_0。

（2）x_0是A的聚点当且仅当$A-\{x_0\}$中存在一个网收敛于x_0。

（3）A是闭的当且仅当A中的收敛网只向A中的点收敛。

（4）A是开的当且仅当向A中[illegible]敛的网终于在A中。

证明请读者完成。

从以上讨论我们已经看出，在拓扑空间中，网的收敛性是靠拓扑来定义的，反过来，又可以用网的收敛性来描述拓扑，这说明在拓扑空间中网的收敛与开集、闭集、闭包、……等概念起着同等的作用。因此，我们自然又会联想到一个问题：对于一个集合X，如果我们指定X中的某些网为收敛网、并指定这些网各自以哪些点为极限，那么可否确定X上的一个拓扑$\mathscr{T}$，使得空间（X，$\mathscr{T}$）中网的收敛正好与指定的这种收敛相一致呢？为着解决这个问题，有必要对网的收敛性质作进一步的讨论。

我们不妨再回到E^2中去，数学分析中一个熟知而重要的事实是：若点列$\{P_n\}$以P为聚点，则点列$\{P_n\}$有子列$\{P_{n_i}\}$向P收敛，遗憾得很，E^2中的这一事实，对一般拓扑空间却未必正确。例十六所举的空间π即是一例，我们把可数集$A=\{P_{n,m}: n, m$是自然数$\}$随意地排成一列$\{Q_i\}$，P_0总是$\{Q_i\}$的聚点，但是$\{Q_i\}$中不会有向P_0收敛的子列。可以想到，随着列推广到网，旧有的子列概念也应该有相应的推广。

定义16 设$S=\{S_n, n\in D\}$与$T=\{T_m, m\in E\}$都是集X中的网，我们称T是S的子网，是指存在着一个映射$N: E\to D$，使得

（1）$T=S\circ N$，即$T_m=S_{N_m}$对一切$m\in E$成立；

（2）对任意给定的$n\in D$，存在$e\in E$，使得当$m\geqslant e$时有$N_m\geqslant n$。

条件（1）使得每个T_m都是某个S_n。条件（2）的直观意思是：当$m\in E$充分大时，N_m可以任意大。它们保证了当网S终于在集合A中时，其子网T也终于在A中，从而保证了网的极限一定也是子网的极限。

定理2.14 若网$S=\{S_n, n\in D\}$的聚点是x，则S有子

网向x收敛。反之亦真。

证明 因为x是网$S=\{S_n, n\in D\}$的聚点，所以对每一个$U\in\mathscr{U}(x)$以及每一个$d\in D$，都有

$$U\cap\{S_n: n\geqslant d\}\neq\varnothing$$

取点 $T_{(U,d)}=S_{N(U,d)}\in U\cap\{S_n, n\geqslant d\}$，

并在直积$\mathscr{U}(x)\times D$上定义如下定向：

$$(U_2, d_2)>(U_1, d_1)$$

当且仅当 $U_2\subset U_1$ 及 $d_2>d_1$

如此得到的网$T=\{T_{(U,d)}, (U, d)\in\mathscr{U}(x)\times D, >\}$便是$S$的一个子网，并向$x$收敛。这样就证明了必要性。

充分性。设T是S的子网，T的极限一定是S的聚点。这是因为当T终于在$U\in\mathscr{U}(x)$中时，S就经常在U中。

〔证完〕

在定理2.14的证明中我们曾由两个定向集（$\mathscr{U}(x)$，$\subset$）与（D，$>$）出发，给直积$\mathscr{U}(x)\times D$引入了定向$>$，一般情况是，设$\{(D_i, >_i): i\in I\}$是一族定向集，对于f、$g\in\times_{i\in I} D_i$规定

$f>g$当且仅当对每一个$i\in I$，$f(i)>_i g(i)$。直积$\times_{i\in I} D_i$上规定的这种定向通常称做积定向。

定理2.15 （累次极限定理）

设D是定向集，对每一个$n\in D$，E_n也是定向集，$Q=D\times(\times_{n\in I} E_n$有积定向，且对每一个$(n,f)\in Q$，令$R(n,f)=((n,f(n))$，又设对于所有$n\in D$以及所有$m\in E_n$，$S(n, m)$都是某个拓扑空间（$X$，$\mathscr{T}$）中的点。则当累次极限$\lim_n\lim_m S(n, m)$存在时网$S\circ R$收敛，并且收敛于$\lim_n\lim_m S(n, m)$中的每一点。

（注 $\lim\limits_{n}\lim\limits_{m} S(n, m)$ 存在，即 $\lim\limits_{n}\lim\limits_{m} S(n, m)$ 非空但可能是许多点，为了避免烦杂的陈述，我们只对极限唯一的情况证明）

证明 设 $\lim\limits_{n}\lim\limits_{m} S(n, m)=x$

对x的任意一个开邻域U，存在$n_0\in D$，使得当标号 $n\in D$ 满足$n\geqslant n_0$时

$$x_n=\lim_{m} S(n, m)\in U$$

即U是x_n（$n\geqslant n_0$）的邻域。

于是存在 $e_n\in E_n$ （$n\geqslant n_0$），使 $m\geqslant e_n$，$m\in E_n$ （$n\geqslant n_0$）时有 $S(n, m)\in U$

定义 $f_0\in \underset{n\in D}{\times} E_n$ 如下：

$$f_0(n)=\begin{cases} e_n & n\geqslant n_0,\ n\in D \\ \text{任取}E_n\text{的一元，} & \text{其它的}n\in D \end{cases}$$

于是 $(n_0, f_0)\in Q$，且 $(n, f)>(n_0, f_0)$时

$$S\circ R(n, f)=S(n, f(n))\in U$$

这样就说明了$S\circ R$收敛于x。

〔证完〕

归纳一下，拓扑空间中的收敛网有如下性质：

（1）设 $S=\{S_n, n\in D\}$是常网，即对每个$n\in D$，恒有$S_n=x_0$，则S收敛于x_0；

（2）若网S收敛于x_0，则S的每个子网也收敛于x_0；

（3）若网S不收敛于x_0，则S有子网T，T的任何子网都不收敛于x_0；

（4）累次极限定理成立。

上面归纳的（1）～（4）是收敛网的基本性质。我们还可以证明：

对于任意集合X，如果我们指定了X中的某些网是收敛网，以及这些网各自的收敛点，并且这些收敛网满足上述性质（1）～（4）。则可以由它们确定集X上的一个拓扑$\mathscr{T}$，使得空间（X，$\mathscr{T}$）中的每一个收敛网恰好就是我们开始指定的收敛网，并且它们收敛的点完全一致。

有关这一问题的论证，读者可以参阅 *J·Kelley*：《*General Topology*》（有中译本），此处不再赘述。

§6 连续映射、同胚映射

定理17 设$(X, \mathscr{T}_x)$与$(Y, \mathscr{T}_Y)$是两个拓扑空间，$f: X \to Y$，如果对每一个$V \in \mathscr{T}_y$，恒有$f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_x$成立，即开集的原象是开集，则称映射$f: X \to Y$是连续的。

空间的拓扑结构，除了用开集确定外，尚有多种确定方法，同样地，连续性除了用开集描述外，亦可以用其它概念来描述，了解并熟悉连续性的各种等价命题是十分必要的，它会给我们以后的讨论带来方便。

定理2.16 设X，Y是拓扑空间，$f: X \to Y$是映射，则下列各条件等价：

(1) f连续；
(2) 设$\mathscr{B}$是Y的一个基，对任意的$V \in \mathscr{B}$，$f^{-1}(V)$是开集；
(3) 设$\mathscr{S}$是Y的一个子基，对任意的$V \in \mathscr{S}$，$f^{-1}(V)$是开集；
(4) 设$F \subset Y$是闭集，则$f^{-1}(F)$是闭集；
(5) 设$A \subset X$，则$f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$；
(6) 设$B \subset Y$，则 $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\overline{B}]$；

(7) 设$x\in X$，$y=f(x)$，则对于y的每一个邻域V，存在x的邻域U使得$f[U]\subset V$。

(8) 设$\{S_n, n\in D\}$是X中的网，向x收敛，则$\{f(S_n), n\in D\}$向$f(x)$收敛。

证明 因为对Y中的任意集族$\{B_i: i\in I\}$

有
$$f^{-1}[\bigcup_{i\in I}B_i]=\bigcup_{i\in I}f^{-1}[B_i]$$

$$f^{-1}[\bigcap_{i\in I}B_i]=\bigcap_{i\in I}f^{-1}[B_i]$$

所以(1)(2)(3)彼此等价是显然的。

又因为对$B\subset Y$，有

$$f^{-1}[Y-B]=X-f^{-1}[B]$$

所以(1)与(4)是彼此等价的。

下面我们先证明(4)与(5)等价。

(4) ⟶ (5) 因为

$$A\subset f^{-1}[f[A]]\subset f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

依据(4) $f^{-1}[\overline{f(A)}]$是闭集

故 $\overline{A}\subset f^{-1}[\overline{f[A]}]$

即 $f[\overline{A}]\subset\overline{f[A]}$

(5) ⟶ (4) 设F是Y中任一闭集，要证明$A=f^{-1}[F]$是闭集。由(5)可知

$$f[\overline{A}]\subset\overline{f[A]}=\overline{f[f^{-1}[F]]}\subset\overline{F}=F$$

故 $\overline{A}\subset f^{-1}[F]=A$

从而 $f^{-1}[F]=A$ 是闭集。

其次，再证明(4)与(6)等价。

(4) ⟶ (6) 因为 $f^{-1}[B]\subset f^{-1}[\overline{B}]$，而由(4)知

$\overline{f^{-1}[B]}$是闭集，故$\overline{f^{-1}[B]}\subset f^{-1}[\overline{B}]$。

(6) → (4) 当F是Y中闭集时，依据 (6)

$\overline{f^{-1}[F]}\subset f^{-1}[\overline{F}]=f^{-1}[F]$

从而说明$f^{-1}[F]$是闭集。

最后证明 (1) → (7) → (8) → (4)

(1) → (7) 对$y=f(x)$的邻域V取y的开邻域$V^*\subset V$，依据 (1) $f^{-1}[V^*]$是开集，故是x的开邻域，取$U=f^{-1}[V^*]$，显然有

$f[U]\subset V^*\subset V$成立。

(7) → (8) 设V是$f(x)$的任一开邻域，依据 (7)，存在x的开邻域U，使得$f[U]\subset V$，而网S_n终于在U中，所以网$f(S_n)$终于在V中，故$f(S_n)$向$f(x)$收敛。

(8) → (4) 设F是Y中闭集，要证明$f^{-1}[F]$是闭集，只需证明当$f^{-1}[F]$中有网$\{S_n, n\in D\}$向点$x\in X$收敛时，$x\in f^{-1}[F]$即可。实际上，依据 (8)，S_n向x收敛时，$f(S_n)$就向$f(x)$收敛，而$f(S_n)$是闭集F中的网，所以$f(x)\in F$，$x\in f^{-1}[F]$。

〔证完〕

由连续性定义知道，若$f: X\to Y$连续，同时$g: Y\to Z$连续，则复合映射$g\circ f: X\to Z$连续。

以后，我们还要用到$f: X\to Y$在一点的连续性。f在$x\in X$连续，是指对该点x定理2.16中条件 (7) 成立。映射f连续当且仅当f在每一点$x\in X$连续。

现在我们转而考虑这样一个问题：设X是一个集合，$\mathscr{F}=\{f_i: i\in I\}$是给定的一族映射，其中$f_i$是由$X$到拓扑空间$(Y_i, \mathscr{U}_i)$的映射。那么是否存在$X$上的拓扑，使得每一个映射$f_i$都连续呢？显然，$X$上的散拓扑合乎条件。我们着眼于符合

拓扑$\mathscr{T}$，不难看出，这个最小拓扑$\mathscr{T}$应以集族$\mathscr{S}=\{f^{-1}[V]:V\in\mathscr{U}_i,\ i\in I\}$为子基。这种拓扑$\mathscr{T}$称做由映射族$\mathscr{F}$诱导的拓扑。

定理2.17 设拓扑空间$(X,\ \mathscr{U})$、$(Y,\ \mathscr{V})$，其中$\mathscr{V}$是由映射族$\{g_i:i\in I\}$诱导的拓扑，g_i是由Y向$(Y_i,\ \mathscr{T}_i)$的映射。则映射$f:X\to Y$连续的充要条件是每一个$g_i\circ f$连续。

证明 必要性显然。欲证充分性，可取$\mathscr{V}$的子基$\mathscr{T}=\{g_i^{-1}(V):V\in\mathscr{T}_i,\ i\in I\}$，只须证明每一个$g_i^{-1}[V]$在$f$下的原像$f^{-1}[g_i^{-1}[V]]$是开的。

我们知道：$f^{-1}[g_i^{-1}[V]]=(g_i\circ f)^{-1}[V]$

由$g_i\circ f$的连续性便可推出$(g_i\circ f)^{-1}[V]$是开集，即$f^{-1}[g_i^{-1}[V]]$是开集。

〔证完〕

定义18 设X与Y是两个拓扑空间，若f是由X到Y上的映射，并满足条件：

（1）f是一一映射（从而逆映射$f^{-1}:Y\to X$存在）；

（2）f与f^{-1}都是连续的。

则称f是X到Y上的一个同胚映射(或称X到Y的拓扑变换)，同时称X与Y同胚。

设P代表拓扑空间的某种性质，$\mathscr{H}$代表同胚映射类。如果对$\mathscr{H}$中的每一元$f:X\to Y$，当X具有性质P时，Y也具有性质P，我们就说P是一种同胚不变性，也叫做拓扑不变性或拓扑性质。注意到同胚是拓扑空间类上的等价关系，可以说同胚不变性是这样一种性质：当空间X具备此性质时，凡与X同胚的空间就都具有此性质。从同胚映射的定义可知，$f:X\to Y$是同胚映射当且仅当f是X到Y上的一一映射，同时又可诱导出空间

X的开集族$\mathscr{T}_x$与Y的开集族$\mathscr{T}_Y$之间的一一映射。所以，如果性质P是仅仅依赖集论的术语与开集（或与开集概念等价的概念）来描述的，那么P自然是一种拓扑性质。我们学过的拓扑性质已经不少了，例如"拓扑空间的权$\leqslant m$"，"空间的特征数$\leqslant m$"，"空间的密度$\leqslant m$"等，特别当$m=\aleph_0$时，即是"第二可数性"，"第一可数性"与"可分性"。

拓扑学的主要内容就是研究拓扑不变性。当研究一个具体的空间时，着眼于研究它有哪些拓扑不变性，当研究一个具体性质时，着眼于研究它与其它拓扑性质的关系、在拓扑空间的哪些运算下它依然保持以及对于怎样的映射类它是保持的，各类拓扑空间的划分就是借助拓扑性质来进行的。

§7 分离性T_0、T_1与T_2

定义19 设X是拓扑空间。

（1）X称为T_0型的，是指X满足条件：任意两个不同的点，至少有一点有一个不含另一点的邻域。（T_0分离公理）。

（2）X称为T_1型的，是指X满足条件：任意两个不同的点，其每一点都有一个不含另一点的邻域。（T_1分离公理）

（3）X称为$Hausdorff$空间（或T_2型的），是指X满足条件：对任意的x，$y\in X$，$x\neq y$，存在x的邻域U和y的邻域V，使得$U\cap V=\varnothing$。（T_2分离公理）

定义中的邻域改为开邻域，定义不受影响。

明显地，这三种分离性之间的强弱关系如下：

$$T_2\longrightarrow T_1\longrightarrow T_0$$

取$X=\{a,\ b\}$，显然，粘拓扑不是T_0型的，而$\mathscr{T}=\{\varnothing,\{a\},\ X\}$虽是$T_0$型的却不是$T_1$型的。例七所列的空间（$X$

是无限集，以X本身以及一切有限集为闭集）是T_1型而非T_2型的。

下面讨论与这三种分离性有关的拓扑空间的一些初等性质。

定理2.18 设X是T_0型拓扑空间，则有

$$|X| \leqslant \exp w(X)$$

其中 $\exp a = 2^a$，$w(X)$表示空间的权。

这个定理说明了一个T_0型空间中的拓扑基所必须满足的关系式。实际上，若空间的点很多而开集过少必然不会是T_0型的。

证明 设空间X的拓扑权数$w(X)=a$，于是存在一个基$\mathscr{B}$使得$|\mathscr{B}|=a$。对于X中任意点x都能按下法定义一个集族

$$\mathscr{B}(x)=\{B: B\in\mathscr{B},\ x\in B\}$$

这种由x决定的$\mathscr{B}(x)$显然是一意的，这是由于X是T_0型的，则$x\neq y$时，必有$\mathscr{B}(x)\neq\mathscr{B}(y)$，因此集$X$与族

$$\mathscr{B}^*=\{\mathscr{B}(x): x\in X\}$$

有相同的势，而$\mathscr{B}^*\subset P(\mathscr{B})$ 从而 $|\mathscr{B}^*|\leqslant|P(\mathscr{B})|=2^a$ 这样就证明了 $|X|\leqslant\exp w(X)$。

〔证完〕

定理2.19 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是T_1型空间，当且仅当X中每个点x均有

$$\{x\}=\bigcap\{U\in\mathscr{T}: x\in U\} \qquad (*)$$

成立。

证明 必要性。设$(X,\mathscr{T})$是T_1型空间而$x\in X$，那么当$y\neq x$时，必存在$U\in\mathscr{T}$，使$x\in U$而$y\notin U$，由此即证明条件（*）是必要的。

充分性。设拓扑空间中每一点满足（*），于是，当$y\neq$

x时，必存在$U\in\mathscr{T}$，使之合于$x\in U$，而$y\overline{\in}U$。同样地，存在$V\in\mathscr{T}$，使之合于$y\in V$，而$x\overline{\in}V$，这就说明了空间X是T_1型。

〔证完〕

定理2.20 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是T_1型的，当且仅当每个单点集都是闭集。

证明 (*)式对每一点都成立的充要条件是：当$y\neq x$时，存在$V\in\mathscr{T}$，使之合于$y\in V$而$x\overline{\in}V$，这即说明了y不是$\{x\}$的聚点，即$\{x\}$是闭集。

〔证完〕

推论 设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间而且X是有限集，那么$(X,\mathscr{T})$是T_1型拓扑空间当且仅当它是散空间。

定理2.21 设A是T_1型空间$(X,\mathscr{T})$的任意子集，而$x\in X$。那么x是A的聚点当且仅当x的每一个邻域都有集A的无限多个点。

证明 只须证明必要性就行了。

用反证法。设x的某个邻域U中仅含有A的有限多个点不妨设

$$U\cap\{A\}-\{x\}=\{x_1,\cdots,x_n\}$$

由于$(X,\mathscr{T})$是T_1型的，所以$V=X-\{x_1,\cdots,x_n\}$是x的开邻域，从而$U\cap V$也是的邻域但是$(U\cap V)\cap A-\{x\}=\phi$。这与$x$是$A$的聚点矛盾。

〔证完〕

定理2.21反映的事实是读者在实变函数论中所熟知的，因为实数直线是T_2型空间，更是T_1型空间。

推论 设X是T_1型拓扑空间，$A\subset X$，则A的导集A'是闭集。反之不真。（请读者举一反例）。

定理2.22 拓扑空间X是 $Huasdorff$ 空间，当且仅当每个收敛网的极限都是唯一的。

证明 设X是 $Huasdorff$空间，$S=\{S_n, n\in D\}$是X中向x收敛的网。以下证明当$y\neq x$时，则S不收敛于y。这里乃用反证法，设S也收敛于y，由X是$Hausdorff$ 空间，故存在x的开邻域U和y的开邻域V，而$U\cap V=\varnothing$。由于S同时收敛于x和y，故存在d_1、$d_2\in D$，使$n\geqslant d_1$时$x_n\in U$，$n\geqslant d_2$时$x_n\in V$，因为D是定向集，则存在$d\in D$，满足 $d\geqslant d_1, d\geqslant d_2$，于是 $x_d\in U$，$x_d\in V$，这与$U\cap V=\phi$矛盾。

充分性。设X不是 $Hausdorff$ 空间，则存在x、y，满足x的每个邻域与y的每个邻域都相交。

设U, V分别是x与y的邻域，因为$U\cap V\neq\phi$，可取点$x_{(U,V)}\in U\cap V$，注意$x_{(U,V)}$的标号是两个标号U与V组成的序对$(U, V)\in\mathscr{U}(x)\times\mathscr{U}(y)$。我们对$\mathscr{U}(x)\times\mathscr{U}(y)$ 引入积定向：

$$(U_1, V_1)\leqslant(U_2, V_2)$$

当且仅当 $U_2\subset U_1$，$V_2\subset V_1$

于是$\{x_{(U,V)}, (U, V)\in\mathscr{U}(x)\times\mathscr{U}(y)\}$便是分别向$x$与$y$收敛的网。矛盾。

〔证完〕

我们已经知道，对拓扑X而言，密度与权数总满足不等式$d(X)\leqslant w(X)$，但二者有可能相差很大。

例17 取非可数集Y以及Y之外的一点Ω，令$X=Y\cup\{\Omega\}$在X上引入拓扑$\mathscr{T}$如下：

$U(\neq\phi)\in\mathscr{T}$当且仅当$X-U$是$Y$的可数子集。

不难看出，空间$(X, \mathscr{T})$的密度$d(X)=1$，权$w(X)>\aleph_0$。

下面的定理说明T_2型空间中，空间含点的多少与密度的大小之间有着密切关系。

定理2.23 设$(X, \mathscr{T})$是T_2型拓扑空间，则

$$|X|\leqslant exp\ exp\ d(X)。$$

证明 设A是X的稠密子集，且$|A|=d(X)$，当$x\in X$时，定义集族

$$\mathscr{A}(x)=\{U\cap A : x\in U\in\mathscr{T}\}$$

因为X是T_2是型的，所以$x\neq y$时，必有$\mathscr{A}(x)\neq\mathscr{A}(y)$，这样$X$便与$\{\mathscr{A}(x) : x\in X\}$是一一对应的。

由于 $U\cap A\subset A$，故 $U\cap A\in P(A)$

所以 $\mathscr{A}(x)\subset P(A)$

$\mathscr{A}(x)\in P(P(A))$

所以 $\{\mathscr{A}(x) : x\in X\}\subset P(P(A))$

这样就有

$$|X|=|\{\mathscr{A}(x) : x\in X\}|\leqslant exp\ exp|A|$$
$$=exp\ exp\ d(X)。$$

〔证完〕

§8 子空间

设$(X, \mathscr{T}_x)$是拓扑空间，Y是X的子集。取$\mathscr{T}_x=\{U\cap Y : U\in\mathscr{T}_x\}$，那么下面定理成立。

定理2.24 $(Y, \mathscr{T}_Y)$是拓扑空间

证明留待读者完成。

上述定理中的空间$(X, \mathscr{T}_Y)$叫做$(X, \mathscr{T}_X)$的子空间，$\mathscr{T}_Y$叫做$\mathscr{T}_x$关于Y的相对拓扑或诱导拓扑。

如果把Y到X的恒同映射记为$i : Y\to X$，即对每一点$x\in Y$，

$i(x)=x$，那么不难看出$\mathscr{T}_X$关于Y的相对拓扑$\mathscr{T}_Y$恰好是使得映射i保持连续的Y上的最小拓扑。

若Y是X的子空间，Z又是Y的子空间，我们不难验证Z也是X的子空间。

当Y是X的子空间时，Y中的点x和Y中的子集A就一身处于两个空间之中了，很自然地会提问：若x与A在X中有附贴关系，那么在Y中是否也有附贴关系？类似的问题很多。为此，我们就几个主要方面来进一步讨论一下拓扑空间与子空间的关系。

定理2.25 设$(Y,\mathscr{T}_Y)$，是$(X,\mathscr{T}_X)$的子空间，$x\in Y$，$A\subset Y$，则

(1) A在Y中是闭集当且仅当存在X中的闭集F，使得$A=F\cap Y$。

(2) x就空间Y而言是A的聚点当且仅当x就空间X而言是A的聚点。

(3) $\overline{A}^Y=\overline{A}\cap Y$，其中$\overline{A}^Y$代表就空间$Y$而言$A$的闭包，而$\overline{A}$表示$A$在$X$中的闭包。

证明 (1) 由下列逻辑关系可以明显地看出。

A是Y中闭集$\Longleftrightarrow Y-A$是Y中开集$\Longleftrightarrow$存在X中开集U，使$Y-A=U\cap Y\Longleftrightarrow$存在$X$中开集$U$，使$A=(X-U)\cap Y\Longleftrightarrow$存在$X$中闭集$F$，使$A=F\cap Y$。

又因为就空间Y而言，x的开邻域形如$U\cap Y$，其中U是X中开集，即U是x在X中的开邻域，注意到

$$(U\cap Y)\cap A=U\cap A$$

所以，x在Y中是A的附贴点（聚点）当且仅当x在X中是A的附贴点（聚点）。由此（2）、（3）得证。

〔证完〕

有一些性质，当空间具有此性质时，其子空间（闭子空间、开子空间）也就具有此种性质，这类性质叫做继承性（对闭子空间的继承性、对开子空间的继承性）。

例如第一可数性，第二可数性，T_0、T_1与T_2分离性都是继承性的拓扑性质，但是“密度$\leqslant\aleph_0$”虽是拓扑性质但不是继承性的。例如例十七中 $d(X)=1$，而$d(Y)=|Y|$。

下边讨论一下 *Lindelöf* 性质，*Lindelöf* 性质不具有继承性，然而对闭子空间却有继承性。

定理2.26 设$(X, \mathscr{T}_x)$是 *Lindelöf* 空间，$(Y$，是$\mathscr{T}_y)$是其闭子空间，则$(Y, \mathscr{T}_y)$也是 *Lindelöf* 空间。

证明 设$\{V_i: i\in I\}$是空间Y的一个开覆盖，只须证明它有可数子覆盖就行了。事实上，对于每个V_i，都存在x中的开集U_i，使$V_i=Y\cap U_i$。

由于Y是闭集，$X-Y$就是开集。故集族

$$\{U_i: i\in I\}\cup\{X-Y\}$$

便是X的一个开覆盖。根据X的*Lindelöf* 性质，可知存在一个可数子覆盖：

$$\{U_{i1}, U_{i2}, \cdots\cdots U_{in}, \cdots\cdots\}\cup\{X-Y\}$$

从而$\{V_{i1}, V_{i2}, \cdots, \}$便是$Y$的可数覆盖。

〔证完〕

定理22.7 若$(Y, \mathscr{T}_y)$是$(X, \mathscr{T})$的闭子空间，那么Y中闭集亦是X中闭集；若$(Y, \mathscr{T}_y)$是$(X, \mathscr{T})$的开子空间（Y是X中开集）。那么Y中开集亦是X中的开集

证明是显然的。

§ 9　分离性T_3、T_4与$T_{3\frac{1}{2}}$

在§7中，我们已介绍了三种较弱的分离性，本节是§7的继续。在这里我们不但要介绍几种较强的分离性，而且着手研究它们与连续函数的关系。

定义20　设X是拓扑空间。

（1）X叫做正则空间，是指对X中的任意一点与任意一个闭集F，当$x\overline{\in}F$时，存在x的开邻域与F的开邻域V，使得$U\cap V=\phi$。

（注　集合F以V为邻域，是指F的点都是V的内点）

（2）X叫做正规空间，是指对于X中任意两个不相交的闭集F_1与F_2，存在不相交的开集U_1与U_2，使得$F_1\subset U_1$，$F_2\subset U_2$。

容易推证。空间X是正则的，当且仅当对于X的任意一点x以及x的任一邻域U，都存在x的邻域V使得$\overline{V}\subset U$。换言之，x的闭邻域族是邻域基。空间X是正规的，当且仅当对X的任意闭集F，当开集$U\supset F$时，则存在开集V，使得$F\subset V\subset\overline{V}\subset U$成立。

我们把正则的T_1型空间叫做T_3的，把正规的T_1型空间叫做T_4的。显然

$$T_4\to T_3\to T_2$$

例18　设X是实数集合，令N表示自然数集，$Z=\{\frac{1}{n}:n\in N\}$，$U_k(x)=(x-\frac{1}{k},\ x+\ \frac{1}{k})$

对$x\in X$，定义开邻域基如下：

$$\mathscr{B}(x)\begin{cases}\{U_k(x)\quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots\}, & x\neq 0\\ \{U_k(x)-Z:\quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots\} & x=0\end{cases}$$

由$\mathscr{B}(x)$决定的拓扑$\mathscr{T}$是T_2的但非正则的。这是由于Z是$(X,\ \mathscr{T})$的闭集，$0\overline{\in}Z$，但是0与Z不能用开集分离。

下面介绍一个很有用的引理，由它我们可以推出许多重要结果。

引理2.28 设x是一个拓扑空间，如果对X中任一闭集F，以及包含F的任一开集U，存在可数个开集U_n，$n=1,\ 2,\cdots$，使得$F\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$，且对于每一个$n$，$\overline{U}_n\subset U$，则空间是正规的。

证明 设A与B是X中不相交的二闭集。由于$U=X-B$是包含A的开集，又由题设条件，存在一列开集U_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$使得

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$$

且$\overline{U_n}\cap B=\phi$

同理，存在一列开集V_n，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$使得

$$B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\text{且}\overline{V_n}\cap A=\phi$$

我们令 $U_n^*=UU_n-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{V}_i$

$$V_n^*=V_n-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_i$$

显然，U_n^*、V_n^*都是开集，且对于任意的m、$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots U_m\cap V_n^*=\phi$

从而 $U^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^*$与$V^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^*$是两个不相交的开集。

又因为$\forall x \in A$，$x \in$某个U_{n_0}，但$x \overline{\in} \overline{V_n}$，故$x \in U_{n_0}^*$，于是$A \subset U^*$，同理$B \subset V^*$。这样$A$与$B$被开集$U^*$与$V^*$分离。

〔证完〕

定理2.29 正则的$Lindelöf$空间是正规的。

证明 为了明证正则的$Lindelöf$空间X是正规的，只须证明X满足引理2.28的条件。

设F是任一闭集，开集$U \supset F$。因为X是正则的，对每一个$x \in F$，存在x的开邻域U_x，使得

$$x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset U$$

这样得到了F的一个开覆盖$\{U_x: x \in F\}$，由定理2.26，闭集F也是$Lindelöf$空间，就有某个可数子覆盖$\{U_{x_n}; n=1, 2 \cdots\cdots\}$，显然，$\{U_{x_n}: n=1,2, \cdots\cdots\}$满足引理2.28的条件。

〔证完〕

由此可以推出一个重要的结论：

满足第二可数公理的正则空间是正规空间。

根据定理2.28，我们还可以推出，势为可数的正则空间必然是正规的。

为了熟悉引理2.28并学会使用这个引理我们再做一个练习：证明$Sorgenfrey$直线K是正规的。读者不难证明$Sorgenfrey$直线也是$Lingelöf$的。

设F是K中任意一个闭集，开集$U \supset F$。因为F的每一点都是U的内点，所以F的点不外两种。

(1) $x \in F$，并且存在区间(a, b)，使得

$$x \in (a, b) \subset U$$

对这样的点可以选取一对有理数r、r'，使

$$x\in(r, r')\subset[r, r')\subset U$$

（2）$x\in F$，但不存在上述形式的区间(a, b)。此时可以选取有理数$r_x>x$，使得

$$x\in[x, r_x)\subset U$$

并且当x、$y\in F$，$x\neq y$时，相应的(x, r_x)与(y, r_y)必然互不相交，从而可知第（2）类点至多可数个。

由于（1）、（2）两类点各自对应的区间$[r, r')$与$[x, r_x)$总共是可数个，它们就形成了符合引理2.28条件的$\{U_n: n=2,\cdots\}$，从而K是正规空间。

连续映射在拓扑学研究中起着重要作用，特别是由拓扑空间到实数空间R（或I）的映射。显然，当X是粘空间时，一切实值连续函数都是常值函数。更有趣的是，确实存在这样的空间，它是T_3的，但是其上的每一个实值连续函数也都是常值函数。

定义21 设X是拓扑空间，若对X中的任意一点x以及不含此点的任意闭集F，都存在一连续函数f: $X\to I$，使得$f(x)=0$，而$y\in F$时，$f(y)=1$，则称X是完全正则的。此时，也说点x与闭集F是函数分离的。若将$I=[0, 1]$换成任意闭区间$[a, b]$，要求$f(x)=a$，而$y\in F$时，$f(y)=b$，并不影响定义。

完全正则的T_1型空间叫做$T_{3\frac{1}{2}}$的，也叫做Tychonoff 空间。显然，$T_{3\frac{1}{2}}\to T_3$。

下面将证明：T_4空间一定是$T_{3\frac{1}{2}}$空间。（但反之不真。例12中的Niemytzki平面就是一个反例，此处不详述）。

定理2.30 设X是正规空间，如果F_1与F_2是X中的闭集，合于条件$F_1\cap F_2=\varnothing$，则存在连续函数f: $X\to[0,1]$，当$x\in$

F_1时，$f(x)=0$，当$x\in F_2$时，$f(x)=1$。换言之，二不相交闭集可以用函数分离。

上述定理以"Urysohn引理"命名而著称于世。下边给出它的证明。

证明 首先应注意，X是正规空间与下述条件等价：对任意闭集F及开集U，当$F\subset U$时，存在开集V，满足$F\subset V\subset \overline{V}\subset U$。

因为F_1、F_2为不相交闭集，若取$U_1=X-F_2$，则$F_1\subset U_1$。利用X的正规性，根据上边所述，存在开集$U_{\frac{1}{2}}$，使之满足条件：

$$F_1\subset U_{\frac{1}{2}}\subset \overline{U}_{\frac{1}{2}}\subset U_1$$

再由X的正规性，又存在开集$U_{\frac{1}{4}}$与$_{\frac{3}{4}}$，满足下列条件：

$$F_1\subset U_{\frac{1}{4}}\subset U_{\frac{1}{4}}\subset U_{\frac{1}{2}}与\subset \overline{U}_{\frac{1}{2}}\subset \overline{U}_{\frac{3}{4}}\subset U_1$$

一般地说，假若对于所有形为$k/2^n$的二进有理数γ均已定出了U_r，其中$k\leqslant 2^n$，$n\leqslant n_0$，满足条件：

当二进有理数$r_1<r_2$时

$$\overline{U}_{r_1}\subset U_{r_2}$$

现在可按下述方法对形如$k/2^{n_0+1}$的既约二进有理数定出相应的U_r：

设在形为$k/2^n$，$k\leqslant 2^n$，$n\leqslant n_0$的诸数中r_1是比$k/2^{n_0+1}$小的最大者，r_2是比$k/2^{n_0+1}$大的最小者，因为此时有

$$\overline{U}_{r_1}\subset U_{r_2}$$

根据X的正规性，就可以取得开集U_r使之合于

$$\overline{U}_{r_1}\subset U\subset \overline{U}_r\subset U_{r_2}$$

这样，对一切二进有理数$r\in(0,1)$都可以归纳地定义相应的开集U_r，使其满足条件：

（1） 当$r_1<r_2$时， $U_{r_1}\subset U_{r_2}$

（2） 对一切二进有理数$r\in(0,1)$

$$F_1\subset U_r\subset \overline{U}_r\subset U_1=X-F_2$$

今定义函数f：$X\to[0,1]$如下：

$$f(x)=\begin{cases} \inf\{r:\ x\in U_r\}, & x\in X-F_2 \\ 1, & x\in F_2 \end{cases}$$

显然，当$x\in F_1$时，$f(x)=0$，余下的问题是证明f是连续的，这只须证明形如$[0,a)$，$(b,1]$的区间在映射f下的原象是开集就行了。

设$x_0\in f^{-1}([0,a))$，于是$f(x_0)=\inf\{r:\ x_0\in U_r\}<a$，取二进有理数$r_1$，使$f(x_0)<r_1<a$，那么就有

$$x_0\in U_{r_1}\subset f^{-1}([0,a))$$

这就说明$f^{-1}([0,a))$是其自身每一点的邻域，即是开集。

设$x_0\in f^{-1}((b,1])$，于是$f(x_0)=\inf\{r:\ x_0\in U_r\}>b$取二进有理数$r_1$、$r_2$ 使$f(x_0)>r_2>r_1>b$那么就有$x_0\notin U_{r_2}$，更有$x_0\notin\overline{U}_{r_1}$，从而

$$x_0\in X-\overline{U}_{r_1}\subset f^{-1}((b,1])$$

说明$f^{-1}([b,1])$是开集。

〔证完〕

由*Y pblcoH*引理容易得到

$T_4\to T_{3\frac{1}{2}}$

对于正规空间，下述*Tietze*关于连续函数的扩张定理也是极为重要而且有用的。

定理2.31（*Tietze*定理）

设X是正规空间，Y是X的闭子空间，若f是Y上的实值连续函数，则存在X上的实值连续函数$\widetilde{f}$，使得当$x\in Y$时，$\widetilde{f}(x)=f(x)$。$\widetilde{f}$称作f在X上的连续扩张，而f也叫做$\widetilde{f}$在Y上的限制，记作（$\widetilde{f}|_Y=f$）。

证明 首先就f是Y上的实值有界连续函数给出证明。无妨设f：$Y\to[-a,\ a]$。

令$F_1=f^{-1}([-a,\ -\frac{1}{3}a])$，$F_2=f^{-1}([\frac{1}{3}a,\ a])$

由于f是Y上的连续函数，而Y又是空间X的闭子集，便知F_1、F_2都是X中的闭集，并且不相交。据Urysohn引理，便有连续函数g_1：$X\to[-\frac{1}{3}a,\ \frac{1}{3}a]$，使得$x\in F_1$时，$g_1(x)=-\frac{1}{3}a$，$x\in F_2$时，$g_1(x)=\frac{1}{3}a$。从而，当$x\in Y$时，有

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2}{3}a$$

我们取$f_1(x)=f(x)-g_1(x)$。则$f_1(x)$亦是Y上的实值连续函数，且f_1：$Y\to[-\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}a]$，重复前面的步骤，便可得：$g_2$：$X\to[-\frac{1}{3}(\frac{2}{3}a),\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3}a)]$，使得，当$x\in Y$时，有

$$|f_1(x)-g_2(x)|\leqslant\frac{2}{3}(\frac{2}{3}a)$$

即
$$|f(x)-g_1(x)-g_2(x)|\leqslant(\frac{2}{3})^2a$$

一般地，假设已求出X上的连续函数g_1，g_2，…，g_n使得

（1）$|g_k(x)|\leqslant\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}a\qquad x\in X,\ k=1,\ 2,\ \cdots,$

（2）$|f(x)-(g_1(x)+\cdots+g_n(x))|\leqslant(\frac{2}{3})^ka,\ x\in Y,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$。

若令 $f_n(x)=f(x)-(g_1(x)+\cdots+g_n(x))$，则$f_n$是一实值连续函数（有界）：

f_n: $Y \longrightarrow [-(\frac{2}{3})^n a,\ (\frac{2}{3})^n a]$

再重复开始的处理步骤，便得到X上一个实值连续函数：

g_{n+1}: $X \longrightarrow [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n a,\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n a]$，使得，当$x \in Y$时，有

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} g_k(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^{n+1} a$$

由此得到函数列$\{g_k\}$，其中g_k是X上满足上面条件(1)、(1)的实值连续函数。由(1)可知级数$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$在$X$上一致收敛。

令$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$

故$\tilde{f}$在X上连续，且

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1} a = a$$

又由（2）可知

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant |f(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right| = 0$$

即 $\tilde{f}|_Y = f$

这样就证明了f: $Y \to [-a,\ a]$连续时，有连续扩张

$\tilde{f}$: $X \to [-a,\ a]$

当f在Y上无界时，可取一个同胚映射

$$i: (-\infty,\ +\infty) \to (-1,\ 1)$$

于是，根据前面结果，连续函数$i \circ f$: $Y \to [-1,\ 1]$有连续扩张$\tilde{f}_1$: $X \to [-1,\ 1]$，注意到$A = \tilde{f}_1^{-1}(\{-1,\ 1\})$是$X$中的闭集，且与$Y$不相交，故存在连续函数$h$: $X \to [0,\ 1]$，使得当$x \in A$时$h(x) = 0$，当$x \in Y$时$h(x) = 1$。

令 $\widetilde{f}=i^{-1}\circ(\widetilde{f}_1\cdot h)$

显然，$\widetilde{f}$是X到R的连续函数，且$\widetilde{f}|_Y=f$。

〔证完〕

在Tietze定理中，X的正规性是重要的，否则X将有不相交的闭集A、B，不能被开集分离，令$Y=A\cup B$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ 1, & x\in B\end{cases}$$

显然，f是Y上的实值连续函数，但不存在X上的连续扩充。

§10 连通性

设A与B是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的两个子集，当$A\cap\overline{B}=\varnothing=\overline{A}\cap B$时，我们便说$A$与$B$是隔离的。换句话说，$A$与$B$任一个都不含另一个的附贴点。例如实数空间中$(0,1)$与$(1,2)$就是隔离的，但是$(0,1)$与$[1,2)$不是隔离的。$A$与$B$隔离，有几种等价的说法。其一，$A$与$B$不相交并且同是子空间$A\cup B$中的开集。或者，$A$与$B$不相交且同是子空间$A\cup B$的闭集。或者$A$与$B$不相交且其一是子空间$A\cup B$的既开且闭集。显然，若$A$与$B$隔离，则$A_1\subset A$与$B_1\subset B$亦是隔离的。

关于隔离集我们提出如下几条性质。

定理2.32 设Y、Z是拓扑空间中的两个闭集，则$Y-Z$与$Z-Y$便是隔离的。

证明 显然，$Y-Z$的附贴点必属于闭集Y，从而不属于$Z-Y$，对$Z-Y$亦是一样，故$Y-Z$与$Z-Y$是隔离的。

〔证完〕

定理2.33 设X是拓扑空间，$X=Y\cup Z$，若$Y-Z$与$Z-Y$是隔离的，那么对于任意的$A\subset X$，有以下关系成立：

$$\overline{A}=(\overline{A\cap Y}^{Y})\cup(\overline{A\cap Z}^{Z})$$

其中$\overline{A\cap Y}^{Y}$，$\overline{A\cap Z}^{Z}$分别表示集合$A\cap Y$，$A\cap Z$于子空间Y及Z中取的闭包。

证明 因为$\overline{A}=\overline{A\cap Y}\cap\overline{A\cap Z}$

于是有 $\overline{A}\supset\overline{A\cap Y}^{Y}\cup\overline{A\cap Z}^{Z}$

以下证明 $\overline{A}\subset\overline{A\cap Y}^{Y}\cup\overline{A\cap Z}^{Z}$

若$x\in\overline{A}$，不妨设$x\in\overline{A\cap Y}=\overline{A\cap(Y\cap Z)}\cup\overline{A\cap(Y-Z)}$，

于是，当$x\in Y$时，有

$$x\in\overline{A\cap Y}^{Y}$$

否则$x\bar{\in}Y$，有

$$x\in Z-Y$$

因为$Z-Y$与$Y-Z$是隔离的，故有

$$x\bar{\in}\overline{Y-Z}$$

即 $x\in\overline{A\cap(Y\cap Z)}\subset\overline{A\cap Z}$

从而 $x\in\overline{A\cap Z}^{Z}$

〔证完〕

下列定理是显然的。

定理2.34 若X是拓扑空间，$X=Y\cup Z$，而且$Y-Z$与$Z-Y$是隔离集，若A满足：

$A\cap Y$在Y中开（闭），$A\cap Z$在Z中开（闭），则A便是开（闭）集。

证明 “闭”的情况是上一定理的推论，“开”的情况只须考虑余集即可。

〔证完〕

现在引入拓扑空间的另一重要概念——连通集的概念。

定义22 设A是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中的非空集合，若A不能表示成两个非空隔离集之并，则称A是连通集，若X本身是连通集，则称$(X, \mathscr{T})$是连通空间。若拓扑空间的每一点存在着由连通集组成的邻域基，则称空间是局部连通空间。

我们不难证明实数空间R及其每一区间都是连通的。实际上，设R是不连通的，于是$R=R_1\cup R_2$，其中R_1，R_2都是既开且闭的非空集，且不相交，任取点$x_1\in R_1$，$x_2\in R_2$，无妨设$x_1<x_2$。令$a=\inf\{x: x\in R_2, x>x_1\}$，以下可以说明不论$a\in R_1$或$a\in R_2$都将导致矛盾。

(1) 若$a\in R_2$，因R_2是开集，故存在R_2中点x，使$x_1<x<a$，与"a是下确界"矛盾。

(2) 若$a\in R_1$，因R_1是开集，故存在b，使$[a, b)\subset R_1$，又与"a是下确界"矛盾。

从而R是连通的。

以下介绍的关于连通集的结果是很有用的。

定理2.35 若A是空间X中的连通集，B满足条件

$$A\subset B\subset \overline{A},$$

则B亦是连通集。

证明 用反证法。假设B不是连通集，则$B=B_1\cup B_2$，其中B_1、B_2非空，且$\overline{B}_1\cap B_2=B_1\cap\overline{B}_2=\varnothing$。

由于$A\subset B$，可知$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)$，因为$B_1$，$B_2$是隔离的，而$A$是连通集，则$A\cap B_1$与$A\cap B_2$至少一项是空集。

无妨设$A\cap B_2=\varnothing$，从而$A\subset B_1$，

$$\overline{A}\cap B_2\subset \overline{B}_1\cap B_2=\phi$$

而$B_2 \subset B \subset \overline{A}$，$B_2 = \overline{A} \cap B_2 = \phi$

这样与$B_2 \neq \phi$矛盾。

〔证完〕

定理2.36 设$\{A_i: i \in I\}$是一族连通集，B也是一个连通集，而且B与每个A_i均不隔离，那么，$B \cup (\cup \{A_i: i \in I\})$也是连通集。

证明 为着书写简单起见，令$C = B \cup (\cup \{A_i: i \in I\})$，仍用反证法。

假设C不是连通集，则$C = C_1 \cup C_2$，其中C_1、C_2是二非空隔离集。由B连通，故B必整个包含于某一个C_i，例如$B \subset C_1$，又每个A_i与B不隔离，故$A_i \subset C_1$，从而$C_2 = \phi$。矛盾。

〔证完〕

推论1 若$\{A_i: i \in I\}$是一族连通集，两两不隔离，则$\cup \{A_i: i \in I\}$是连通集。

推论2 若集A中的任意两点x、y，存在连通集A_{xy}满足：

$$\{x, y\} \subset A_{xy} \subset A$$

则A是连通集。

用数学归纳法容易证明：

推论3 若A_1，A_2，…，A_n是有限个连通集，而且A_i与$A_{i+1}(i = 1, 2 \cdots n-1)$不隔离，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$便是连通集。

推论4 若$A_1, A_2 \cdots, A_n, \cdots\cdots$是可列个连通集，$A_n$与$A_{n+1}$不隔离($n = 1, 2, \cdots\cdots$)，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$是连通集。

定理2.37 连通集的连续象是连通的。

证明 设$f: X \to Y$是连续的，$A \subset X$。

若$f(A)$不是连通集，于是有非空隔离集B_1与B_2使$=f(A)$ $=B_1\cup B_2$。

不难证明$f^{-1}(B_1)$与$f^{-1}(B_2)$亦是相隔离的(否则由$x\in\overline{f^{-1}(B_1)}\cap f^{-1}(B_2)$，推出$x\in f^{-1}(\overline{B_1})\cap f^{-1}(B_2)$，于是$f(x)\in\overline{B_1}\cap B_2$，矛盾于$\overline{B}_1\cap B_2=\phi$。

这样A就可以表示为非空隔离集$f^{-1}(B_1)\cap A$与$f^{-1}(B_2)\cap A$之并。矛盾于A是连通集。

〔证完〕

由此定理可知，连通性是同胚不变性。

定理2.38（樊畿）

拓扑空间X中的子集A是连通的，当且仅当下列条件成立：

对每一点$Ax\in A$，取任一开邻域V_x。那么对A中任意两点a、b，存在A中有限个点$a_1=a$，a_2，…，$a_n=b$使

$$A\cap V_{a_i}\cap V_{a_{i+1}}\neq\phi\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1)(^*)$$

证明 首先证明条件的充分性。用反证法。若A不连通，则$A=A_1\cup A_2$，其中，$A_1\neq\phi$，$A_2\neq\phi$，且$\overline{A}_1\cap A_2=\overline{A}_2\cap A_1=\phi$

对每一个$x\in A_1$，可取$V_x=X-\overline{A}_2$

对每一个$x\in A_2$，可取$V_x=X-\overline{A}_1$

于A_1、A_2中分别取定a,b，对A中任意有限个点：$a=a_1$，a_2，…，$a_n=b$，必存在i，使$a_i\in A_1$，而$a_{i+1}\in A_2$，那么有

$$\begin{aligned}A\cap V_{a_i}\cap V_{a_{i+1}}&=A\cap(X-\overline{A}_2)\cap(X-\overline{A}_1)\\&=A\cup(X-\overline{A}_1\cup\overline{A}_2)=\phi\end{aligned}$$

故不满足(*)

其次证明必要性

设A是连通的，当$x\in A$，V_x是任意确定的x的开邻域时，要

证对A中任二点a、b，有满足(*)的有限个点：$a_1=a, a_2, \cdots, a_n=b$。这样的点列称做连接$a$、$b$的一个链。

用反证法。假若对A中两点a、b，不存在这样的有限链。先将a固定下来，并考虑一切与a能用有限链连接的点之集合E($\subset A$)，显然，$b\notin$E，从而E是A的非空真子集。以下证明E是子空间A中既开且闭的集合。

i) E是A中的开集。

实际上，当$x\in$E时，便存在一有限点列$a_1=a$，a_2，$\cdots$，$a_n=x$满足(*)，此时，若$y\in V_x\cap A$，则将y取作a_{n+1}，那么式(*)对$i\leqslant n$也是成立的。因此，$x\in$E时，$A\cap V_x\subset$E，从而E是A中开集。

(2) E是A中闭集。

设 $y\in \overline{E}^A=\overline{E}\cap A$，则必存在$x\in$E，使$x\in V_y$，设$a_1=a$，$a_2$，$\cdots$，$a_n=x$是连接$a$与$x$的一个链，那么令$a_{n+1}=y$时，式(*)对于$i\leqslant n$仍然是成立的，即证明了$y\in$E，故$\overline{E}^A=$E。

综上所述，E是A中既开且闭的非空真子集，从而A不是连通的，矛盾。必要性得证。

〔证完〕

X是拓扑空间，x是X中任意一点，那么含点x的一切连通集之并仍是一个连通集，且是含有x的最大连通集，把它叫做X的一个连通分支。容易看出，同一空间中的不同连通分支是互不相交的。每个连通分支都一定是闭集，但不一定是开集。若C是一个连通分支，那么对于每一点$y\in$C，C是含y的最大连通集。

例如 考虑E^2中的点集

$$E_i=\{(x,y): x=\frac{1}{i},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{i}\}$$

令　$X=\{(0,0)\}\cup(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)$

于X上取相对拓扑，则含(0、0)的连通分支是$\{(0,0)\}$，它不是X中的开集。

对于局部连通空间则有以下结果：

定理2.39　局部连通空间X中的每一连通分支是既开且闭的。

证明留给读者完成。

局部连通空间不一定是连通的，反之，连通空间也不一定是局部连通的。

例如　在E^2中的两条平行线

$$l_1=\{(x,\ y):x=0\}$$

$$l_2=\{(x,\ y):x=1\}$$

令$X=l_1\cup l_2$，取相对拓扑，则它是局部连通的，但不是连通的。

又如　在E^2中取直线

$$l_i=\{(x,\ y):x=\frac{1}{i}\}\qquad i=1,\ 2,\ \cdots$$

$$l_0=\{(x,\ y):\ x=0\}$$

$$l=\{(x,\ y):\ y=0\}$$

令　$X=(\bigcup_{i=0}^{\infty}l_i)\cup l$，并取相对拓扑，则$X$是连通的，但不是局部连通的。$l_0$上除原点之外的每一点都不具备连通的邻域基。

第二章　习　题

1．试证：集X上任意多个拓扑的交是X上的拓扑。

2．举出一例，$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$都是集X上的拓扑，但$\mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$不是$X$上的拓扑。

3．设$(X,\ \mathscr{T})$是一个拓扑空间，$A\subset X$，试用邻域概念来证明

$$X=A^\circ\cup\overline{(X-A)}.$$

4．设$(X,\ \mathscr{T})$是拓扑空间，$x\in U\subset X$，证明U是x的邻域当且仅当对于以x为聚点的集合$A\subset X$恒有$A\cap U-\{x\}\neq\varnothing$。

5．已知欧几里得平面的子集$A=\{(x,0):0<x<1\}$与$B=\{(x,\ y):x$与y都是有理数$\}$，请指出$\overline{A}$，A°，A^b，$\overline{B}$，B°，B^b以及$(\overline{B})^\circ$，$(\overline{B^\circ})$。

6．设$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$是同一个集X上的两个拓扑，$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$，我们把子集$A$在空间$(X,\mathscr{T}_n)$中的闭包记为$A^{-n}$，内部记为$A^{\circ n}$，其中$n=1,\ 2$，试问

$$A^{-1}与A^{-2}，\qquad A^{\circ 1}与A^{\circ 2}$$

之间有怎样的包含关系？

7．设$X=\{a,\ b\}$，试在X上引入拓扑$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$，使得单点集$A=\{a\}$在空间$(X,\ \mathscr{T}_1)$中的导集A'不是闭的，而在$(X,\ \mathscr{T}_2)$中A'是非空的闭集。

8．设$\mathscr{B}_1$与$\mathscr{B}_2$是同一个拓扑空间$(X,\ \mathscr{T})$的不同的两个基底，试问$\mathscr{B}_1$与$\mathscr{B}_2$有什么关系？

9．设空间$(X,\ \mathscr{T})$满足第二可数公理，证明X的每一个基底都包含着一个可数基底。

10．设A在空间X中稠密，U是开集，证明$U\subset(A\cap U)^-$

11．在具有序拓扑的序数空间$[0,\omega_1)$中有可数稠密子集吗？

12．对Sorgenfrey直线K回答下列问题：

① 除去ϕ与K之外，K中有没有既开且闭的子集合？

② K满足第一可数公理吗？

③ K有可数稠密子集吗？

13. 设X是T_1空间，$A\subset X$，证明导集A'是闭集。

14. 已知X是无限集，请给出$\mathscr{T}$，使$(X, \mathscr{T})$是T_1型拓扑空间，并且$\mathscr{T}$是此种拓扑的最小者。

15. 举例：A是实数空间R的一个子集，满足条件

$A' \neq (A')' \neq ((A')')'$。

16. 设$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间，证明下列三条件彼此等价：

① $(X, \mathscr{T})$是T_2的；

② 对任意的x、$y\in X$，$x\neq y$，存在x的开邻域U使得$y\bar{\in}\overline{U}$；

③ 对每一点$x\in X$，有$\bigcap\{\overline{U}: x\in U\in\mathscr{T}\}=\{x\}$成立。

17. 设f与g是空间X到T_2空间Y的连续映射，证明

(1) 集$\{x: f(x)=g(x)\}$在X中是闭的；

(2) 当A是X的稠密子集，并且$f|_A=g|_A$时，$f=g$。

18. 证明分离性T_i是可继承的，其中$i\leqslant 3\frac{1}{2}$。

19. 设映射$f: X\to Y$连续，如果我们按照下述情形改变X或Y的拓扑，试问f仍然连续吗？

(1) 将X上的拓扑加细；

(2) 将X上的拓扑变粗；

(3) 将Y上的拓扑加细；

(4) 将Y上的拓扑变粗。

20. 设f与g都是空间X到实数空间R的连续函数，试证

(1) af，$f+g$连续，其中a是给定的实数；

(2) $f\cdot g$，f/g连续（式f/g中的g在X上恒不取零值）；

(3) $|f|$，$max\{f, g\}$，$min\{f, g\}$连续。

21. 设X是拓扑空间，$X=A\cup B$，并且$A-B$与$B-A$是相隔离的，映射$f: X\to Y$在A上连续同时在B上连续。证明f在X上连续。

22. 设f是空间X到空间Y上的连续映射，证明$d(Y)\leqslant d(X)$，其中$d(X)$表示空间X的密度。

23. 设f是空间X到空间Y上的连续映射，证明当X是Lindelöf空间时Y是Lindelöf空间。

24. 按下述要求各举一例：

(1) 映射$f: X\to Y$上是开的、连续的，但不是闭的；

(2) 映射$f: X\to Y$上是闭的、连续的，但不是开的；

(3) 映射$f: X\to Y$上是既开且闭的、连续的，但不是同胚映射；

(4) 映射$f: X\to Y$上是连续的、一对一的，但不是同胚映射。

25. 已知X是无限集，$\mathscr{T}=\{\phi$，有限集的余集$\}$，试问空间$(X, \mathscr{T})$连通吗？

26. 设$(X,\mathscr{T})$是连通的拓扑空间，若$\mathscr{T}^*$也是X上的拓扑，并且$\mathscr{T}^*\subset\mathscr{T}$，试问$(X, \mathscr{T}^*)$连通吗？

27. 设D表示由两个点组成的散空间$\{0, 1\}$，X是一个拓扑空间，证明X是连通的当且仅当不存在由X到D上的连续映射。

28. 设R是通常的实数空间，Q与N分别表示有理数集与自然数集，做为子空间来看，空间Q与空间N各自的连通分支有多少？二者的连通分支有什么不同？这两个空间同胚吗？

29. 试证Sorgenfrey直线K是一个Lindelöf空间。

*30. 试证Neimytzki平面L不是正规空间。

*31. 试构造一例：$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$是同一个集合X上的拓扑，$\mathscr{T}_1 \subsetneq \mathscr{T}_2$，但$W(X, \mathscr{T}_1) > W(X, \mathscr{T}_2)$，其中$W(X, \mathscr{T})$表示拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的权。

第三章 积空间、商空间

§1 积空间

设$\{X_a: a\in A\}$是一族拓扑空间，考虑直积$X=\times\{X_a: a\in A\}$，令P_a表示从X到坐标空间X_a的投影，即对每一点$x=\{x_a\}\in X$，$P_a(x)=x_a$。我们把映射族$\{P_a: a\in A\}$决定的拓扑$\mathscr{T}$叫做直积$X=\times\{X_a: a\in A\}$上的乘积拓扑。也叫$Tychonoff$拓扑。把$(X,\mathscr{T})$叫做拓扑空间族$\{X_a: a\in A\}$的乘积空间，简称积空间。由第二章§6知道，乘积拓扑$\mathscr{T}$是使所有$P_a: X\to X_a$连续的、X上的最小拓扑，所以

$$\mathscr{S}=\{P_a^{-1}[U_a]: U_a\text{是}X_a\text{中的开集}, a\in A\}$$

为子基底，其中$P_a^{-1}[U_a]$即是$U_a\times(\times\{X_b: b\in A, b\neq a\})$。一切形如

$$\bigcap\{P_{a_i}^{-1}[U_{a_i}]: i=1, 2, \cdots, n\}$$
$$=\times(\{U_{a_i}: i=1,2,\cdots,n\})\times(\times\{X_a: a\in A, a\neq a_1, \cdots\cdots, a_n\})$$

（其中U_{a_i}是X_{a_i}中的开集，n是自然数）的集合组成了$\mathscr{T}$的一个基底。我们以后把这样的基底（子基底）叫做乘积拓扑的标准基底（子基底），其中的元素叫基本开集。

定理3.1 积空间$X=\times\{X_a: a\in A\}$向其坐标空间X_a的投影P_a是开映射（所谓开映射是指把开集映成开集的映射）。

证明 设G是X中任一开集，今证明$P_a[G]$是X_a中的开

集，这只须证明$P_a[G]$的每一点都是$P_a[G]$的内点。设$x_a\in P_a[G]$。取$x\in G$使之合于$P_a(x)=x_a$。因为G是开集，于是存在某个基本开集

$$B=(\times\{U_{a_i}: i=1, 2, \cdots\cdots, n\})\times(\times\{X_a: a\in A, a\neq a_1, \cdots\cdots, a_n\})$$

使得

$$x\in B\subset G$$

由此推出

$$x_a\in\begin{cases}U_a, & 当a=a_i, i=1, 2, \cdots, n时\\ X_a, & 当a\in A\setminus\{a_1, \cdots, a_n\}时\end{cases}\subset P_a[G]$$

说明x_a是$P_a[G]$的内点。

〔证完〕

从乘积拓扑的定义知道，下述关于连续性的判别法是定理2.17的直接推论。

定理3.2 设f是拓扑空间X到积空间$Y=\times\{Y_a: a\in A\}$的映射，则f连续的充要条件是对每一个$a\in A$，$P_a\circ f$连续，其中P_a是Y到Y_a的投影。

定理3.3 设$\{S_n; n\in D\}$是积空间$X=\times\{X_a: a\in A\}$中的网，$x=\{x_a\}\in X$，则$\{S_n, n\in D\}$收敛于x的充要条件是对每一个$a\in A$，$\{P_a(S_n), n\in D\}$收敛于$P_a(x)$。

证明 必要性。当U是x_a的开邻域时，$P_a^{-1}[U]$就是x的开邻域，既然$\{S_n, n\in D\}$收敛于x，就有$d\in D$使得$S_n\in P_a^{-1}[U]$对一切$n\geqslant d$成立，从而$P_a(S_n)\in U$对一切$n\geqslant d$成立。说明$\{P_a(S_n), n\in D\}$收敛于$P_a(x)=x_a$。

充分性。要证明$\{S_n, n\in D\}$收敛于x，只须证明对x的

每一个形如$P_a^{-1}[U]$的邻域来说，网$\{S_n, n\in D\}$终于在$P_a^{-1}[U]$中，此处的$P_a^{-1}[U]$是标准子基底中的元。由于此时U是x_a的开邻域，那么由$\{P_a(S_n), n\in D\}$收敛于x_a，知道存在$d\in D$使得当$n\geqslant d$时$P_a(S_n)\in U$，从而$S_n\in P_a^{-1}[U]$对一切$n\geqslant d$成立。

〔证完〕

如果注意到直积$X=\times\{X_a: a\in A\}$中的一个点$x=\{x_a\}$就是以A为定义域，对每一个$a\in A$取值于X_a的一个函数。那么定理3.3正好告诉我们这个事实：乘积拓扑使得积空间中网的收敛反映了函数网的按点收敛。特别当A是一个实数集合，每一个坐标空间X_a都取通常的实数空间时，一列以A为定义域的实值函数f_n，$n=1,2,\cdots\cdots$；就是$\times\{X_a: a\in A\}$中的一列点，点列$\{f_n\}$在积空间中收敛于一点f，正好与函数列$\{f_n\}$按点收敛相一致，即对每一个$a\in A$，$\{f_n(a)\}$收敛于$f(a)$。

下面转入关于积空间的分离性的讨论。这里所要研究的问题是，当每个坐标空间都有某种分离性时，乘积空间是否也有同一分离性呢？一般说来，设P是某一拓扑性质，如果当每一坐标空间都有性质P时，便能保证乘积空间也有性质P的话，我们便称P是乘积性的。可以证明T_0、T_1、T_2以及正则性、完全正则性都是乘积性的。作为示例，我们只对T_2以及完全正则性给出证明。

定理3.4 设每一个X_a均是Hausdorff空间，$a\in A$，则积空间$X=\times\{X_a: a\in A\}$是Hausdorff空间。

证明 设$x=\{x_a\}$与$y=\{y_a\}$是X中不同的两点，于是存在某一标号$a\in A$使得$y_a\neq x_a$。因为X_a是Hausdorff空间，

因此有开集U与V合于条件：$x_a \in U$，$y_a \in V$，$U \cap V = \varnothing$。显然 $P_a^{-1}[U]$与$P_a^{-1}[V]$便分别是x与y的开邻域并且不相交。

〔证完〕

定理3.5 设每一个X_a均是完全正则的拓扑空间，$a \in A$，则积空间$X = \times\{X_a : a \in A\}$是完全正则的。

证明 取X的标准子基底$\mathscr{S} = \{P_a^{-1}[U_a] : U_a$是$X_a$中的开集，$a \in A\}$。设$x \in P_a^{-1}[U_a]$，于是$x_a \in U_a$，因为$X_a$是完全正则的，所以有连续函数$g : X_a \to [0, 1]$，使得$g(x_a) = 0$，$g[X_a \setminus U_a] \subset \{1\}$。从而$f_a = g \circ P_a$是$X$到$[0, 1]$的连续函数，使得$f_a(x) = 0$，$f_a[X \setminus P_a^{-1}[U_a]] \subset \{1\}$

若W是x的任意一个邻域，那么就有某个基本开集

$$B = (\times\{U_{a_i} : i = 1, 2, \cdots, n\}) \times (\times\{X_a : a \in A, a \neq a_1, \cdots, a_n\})$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} P_{a_i}^{-1}[U_{a_i}]$$

使得

$$x \in B \subset W$$

对每一个a_i取上述的连续函数$f_{a_i} : X \to [0, 1]$，使得$f_{a_i}(x) = 0$，而当$y \in X \setminus P_{a_i}^{-1}[U_{a_i}]$时$f_{a_i}(y) = 1$。

令

$$f(t) = max\{f_{a_1}(t), f_{a_2}(t), \cdots, f_{a_n}(t)\}$$

由此定义的函数$f : X \to [0, 1]$显然是连续的，并且使得$f(x) = 0$，而当$y \in X \setminus W$时$f(y) = 1$。说明X是完全正则的。

〔证完〕

正规空间的乘积是否是正规的？这个问题曾吸引了不少人，1947年*Sorgenfrey*给出了反例：*Sorgenfrey*直线K是正规的，但乘积空间$K \times K$不是正规的。其证明此处从略，读

者可参阅 R·Engelking, 《General Topology》。

关于非乘积性的拓扑性质，我们再举出第一可数性作为一例。从下述的定理将看出，当乘积因子个数较多(非可数)时，即使是每一因子空间均满足第一可数公理，但一般说来，它们的乘积却不满足这一公理。由此也使我们了解到在研究函数列按点收敛问题时，度量空间是不够用的（例如 c 个实数空间的乘积空间就是不可度量化的。见第五章）。

定理3.6 积空间 $X=\times\{X_a: a\in A\}$ 满足第一可数公理的充要条件是每一个坐标空间 X_a 满足第一可数公理，并且除去可数个坐标空间外，其余 X_a 均是粘空间。

证明 (一) 首先证明：若 f 是 X 到 Y 上的连续开映射，X 满足第一可数公理，则 Y 也满足第一可数公理。

对任意一点 $y\in Y$，取 $x\in X$ 使之合于 $f(x)=y$。因为 X 满足第一可数公理，所以点 x 有可数邻域基，设为 $\{U_n: n=1, 2, \cdots\cdots\}$，无妨认为 U_n 都是开的。令 $V_n=f(U_n)$，因为 f 是开映射，所以 V_n 是开的，并且是 $y=f(x)$ 的开邻域。设 W 是 y 的意一个邻域，由 f 的连续性知道，有某个 U_n 使得 $f(U_n)\subset W$，即 $V_n\subset W$。说明 $\{V_n: n=1, 2, \cdots\cdots\}$ 是 y 的邻域基。

由于投影 P_a 是 X 到 X_a 上的连续开映射，所以积空间 X 满足第一可数公理时，每一个坐标空间满足第一可数公理。

(二) 其次证明：若 B 是 A 的非可数子集，对每一个 $a\in B$，X_a 都不是粘空间，则积空间 $X=\times\{X_a: a\in A\}$ 不满足第一可数公理。

对每一个非粘的坐标空间 X_a 取一点 x'_a，使得 x'_a 有开邻域 $V_a\subsetneqq X_a$。再取点 $x=\{x_a\}\in X$，使得当 $a\in B$ 时 $x_a=x'_a$。现在证明点 x 没有可数邻域基。

用反证法。假设x有可数邻域基，那么就有单调递减的可数邻域基

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k \supset \cdots\cdots$$

并且每一个B_k都是形如$\bigcap_{i=1}^{n} P_{a_i}^{-1}(U_{a_i})$的基本开集。由于每一个$B_k$只对有限多个$a \in A$，$P_a(B_k) \subsetneqq X_a$，所以$C = \{a : a \in A$并且存在$B_k$使$P_a(B_k) \subsetneqq X_a$，$k = 1, 2, \cdots\cdots\}$是个可数集。取$b \in B \setminus C$，那么$P_b^{-1}(V_b)$虽然是$x$的开邻域，却不存在$B_k$使得$B_k \subset P_b^{-1}(V_b)$，与$\{B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots\cdots\}$是$x$的邻域基之假设矛盾。

（三）证明充分性。

设X_{a_i}，$i = 1, 2, \cdots\cdots$，满足第一可数公理，其余X_a都是粘空间。

若$x = \{x_a\} \in X$。对每一个$i = 1, 2, \cdots\cdots$，取x_{a_i}的可数开邻域基$\{V_n^{(i)} : n = 1, 2\cdots\cdots\}$，不难看出由可数族

$$\{P_{a_i}^{-1}(V_n^{(i)}) : i, n = 1, 2, \cdots\cdots\}$$

中有限个元素做交所得的集族就是点x的可数邻域基。

〔证完〕

关于乘积空间的初步讨论就此暂告一段，在以后两章中还要继续这个讨论。乘积空间是由$Tychonoff$引入的，他同时证明了关于积空间的两个最重要的定理，一个是紧空间的乘积定理（见第四章§3），另一个是嵌入定理（见第四章§4）。积空间在不少数学分支中都占有重要地位。

§2 商 空 间

在第二章§5曾研究过这样的问题：给定了由集X到集Y的映射f，当Y是拓扑空间时，能否在集X上引入使f连续的最小拓扑？本节将从相反的方面考虑，引入商拓扑概念。

设f是由X到Y上的映射，当X是拓扑空间而Y是一般集合时，要在Y上引入使f连续的最大拓扑。为了f连续，$V\subset Y$是开集就得使$f^{-1}[V]$是X中的开集。特别，我们应该注意到集族

$$\{V : V\subset Y\text{并且}f^{-1}[V]\text{是}X\text{的开集}\}$$

满足开集公理。由此知道

$$\mathscr{T}=\{V : V\subset Y\text{并且}f^{-1}[V]\text{是}X\text{的开集}\}$$

就是使f连续的、Y上的最大拓扑。我们把这样的拓扑$\mathscr{T}$叫作商拓扑。把$(Y,\ \mathscr{T})$叫作商空间。同时称f是由空间X到空间Y的的商映射。

由商映射的定义容易知道，Y的一个子集F是闭集当且仅当$f^{-1}[F]$是X的闭集。

定理3.7 设f是空间X到空间Y的商映射，g是Y到空间Z的映射，则g是连续的当且仅当$g\circ f$是连续的。

证明 当g连续时，显然$g\circ f$连续。反之，若$g\circ f$连续，那么对于Z中任意开集W来说$(g\circ f)^{-1}[W]=f^{-1}[g^{-1}[W]]$就是$X$中的开集，又因为$f$是$X$到$Y$的商映射，因此$g^{-1}[W]$是$Y$的开集。说明$g$是连续的。

〔证完〕

商映射是特殊的一种连续的满映射。下面给出连续的满映射为商映射的充分条件。

定理3.8 设X与Y是拓扑空间，f是从X到Y上的连续映射，若f同时又是开映射，那么f就是商映射。

证明 要证明f是从空间X到空间$(Y, \mathscr{T})$的商映射，即要证明由f决定的商拓扑就是$\mathscr{T}$。

设f决定的商拓扑是$\mathscr{T}'$。既然$\mathscr{T}'$是使f连续的最大拓扑当然有$\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$成立。另一方面，若$V \in \mathscr{T}'$，那么$f^{-1}[V]$就是$X$的开集，而$f$现在又是开映射，所以$f[f^{-1}[V]] = V \in \mathscr{T}$。由此推得$\mathscr{T}' = \mathscr{T}$。

〔证完〕

将定理中“f是开映射”换作“f是闭映射”（所谓映射$f: X \to Y$是闭映射，乃指f将X的闭集映成Y的闭集），结论仍然成立，证明也只需稍作改动即可。

做为定理3.8的一个直接应用，我们有推论：从积空间$X = \times\{X_a : a \in A\}$到每一个坐标空间$X_a$的投影$P_a$是商映射。换句话说，坐标空间是积空间的商空间。

现在我们要进一步指出，对给定的拓扑空间X来说，商空间Y的拓扑仅仅依赖于商映射，而与Y本身没有什么实质关系。对X的每一个商空间Y，我们都可以给出一个和Y同胚的、形式标准的“拷贝”。

设X是给定的拓扑空间。若E是X上的一个等价关系，那么X就被分解成一些等价类。无妨把$x \in X$所在的等价类记作$\widetilde{x}$。以诸$\widetilde{x}$为元素组成新的集合，记作X/E，叫商集。用p表示把$x \in X$映成$\widetilde{x} \in X/E$的映射，叫做从X到X/E的投影。此时，以投影p为商映射所决定的商拓扑使X/E成为X的一个商空间。这种商空间X/E完全由等价关系E所决定，

形式标准而且自然，我们称之为自然商空间。

定理3.9 设X是拓扑空间，则下列情形等价：

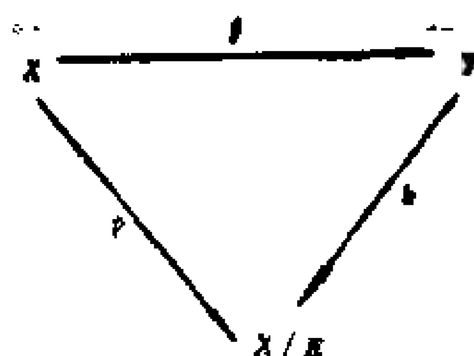
(1) 空间Y是X的一个商空间；

(2) 空间Y与某个自然商空间X/E同胚。

证明 (2)→(1)。由于同胚映射是商映射，而且商映射的复合也是商映射。所以当$h: Y\to X/E$是同胚映射时，$h^{-1}\circ p$就是X到Y的商映射。

(1)→(2)。设Y是由$f: X\to Y$决定的商空间。因为$X=\bigcup\{f^{-1}(y): y\in Y\}$，且当$y_1\neq y_2$时，$f^{-1}(y_1)\cap f^{-1}(y_2)=\varnothing$，所以$\{f^{-1}(y): y\in Y\}$是$X$的一个分解。我们把以$f^{-1}(y)$为等价类的等价关系记作$E$，此时$x$所在的等价类$\tilde{x}=f^{-1}(f(x))$。

对每一个$y\in Y$，令$h(y)=f^{-1}(y)$。显见h是从Y到X/E上的一一映射。



一方面，由于$p=h\circ f$，其中f是商映射，p连续，根据定理3.7，h是连续的。

另一方面，由于$f=h^{-1}\circ p$，其中p是商映射，f连续，同理推知h^{-1}是连续的。所以h是Y到X/E上的同胚映射。

〔证完〕

该定理指出X的任何一个商空间都和某个自然商空间同胚。因此对商空间拓扑性质的研究只需对形如X/E的商空间进行。这种空间的点$\tilde{x}$可以直观地看做将同一等价类中的点全部等置在一起成一个点而得。

定理3.10 设X是拓扑空间，X/E是商空间，P是从X

到 X/E 的投影，则下列情形彼此等价：

(1) P是开映射；

(2) 若A是 X的开集，则$E[A]$是 X的开集；

(3) 若B是 X的闭集，则

$$\bigcup\{P^{-1}(\widetilde{x}):P^{-1}(\widetilde{x})\subset B\}$$

是X的闭集。

证明 首先注意等式

$$E[A]=P^{-1}[P[A]]$$

对一切$A\subset X$ 成立。

(1)→(2)。若A是开集，因为P是开映射，所以$P[A]$是 X/E 的开集，又因为P是商映射，所以$P^{-1}[P[A]]$是X 的开集，即$E[A]$是 X的开集。

(2)→(1)。设A是 X的任意一个开集，由(2)知道$E[A]=P^{-1}[P[A]]$是X的开集，所以$P[A]$是X/E 的开集。说明 P 是开映射。

其次注意等式

$$E[X-B]=X-\bigcup\{P^{-1}(\widetilde{x}):P^{-1}(\widetilde{x})\subset B\}$$

对一切$B\subset X$ 成立。由此直接推出(2)与(3)等价。

〔证完〕

将上述定理中所有的“开”与“闭”互换，相应的三种情形仍然彼此等价。其证明留待读者自己练习。

对于一般的商空间难以展开更多、更深入的讨论，这是由于当X具备某种拓扑性质（例如X满足某种分离性或满足某个可数性公理等等）时，商空间X/E并不一定具备相同的性质。

例1 把实数空间中差$x-y$为有理数的点x和y视为同一等价类中的点予以等置，此时投影P虽然是开映射，但商空间却是粘的。

例2 把实数空间X中所有非负整数点看作一个等价类，记作$\widetilde{0}$，即$\widetilde{0}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\cdots\}$；而对其余的点$x$，令$\widetilde{x}=\{x\}$。我们可以证明这样得到的商空间$X/E$在$\widetilde{0}$处没有可数邻域基。

用反证法。假设$\{B_k: k=1, 2, \cdots\cdots\}$是$\widetilde{0}$处的可数邻域基。不失一般性，可以认为$\{B_k: k=1, 2, \cdots\cdots\}$是单调递减的开邻域基，并且每一个$B_k$取如下形状：

$$B_k=U_0^k\cup(\cup\{U_n^k-\{n\}: n=1, 2, \cdots\cdots\})$$

其中U_0^k，U_n^k各自代表实数空间中数0与自然数n的开邻域，并且U_0^1，U_1^1，$\cdots$，U_n^1，$\cdots\cdots$两两互不相交。

今在实数空间中，对每一个非负整数n都取n的一个开邻域V_n，使得$V_n\subsetneqq U_n^n$，于是集合

$$V=V_0\cup(\cup\{V_n-\{n\}: n=1, 2, \cdots\cdots\})$$

是空间X/E中点$\widetilde{0}$的一个开邻域，但却没有任何一个B_k满足条件$B_k\subset V$，与$\{B_k: k=1, 2, \cdots\cdots\}$是$\widetilde{0}$处的邻域基之假设矛盾。

为了商空间X/E具有较好的拓扑性质，往往需要附加某些特殊的、严格的限制条件。我们只以下述定理做为一例。

定理3.11 若商空间X/E是T_2的，则E是积空间$X\times X$中的闭集。若E是积空间$X\times X$中的闭集，并且从空间X到商空间X/E的投影P是开映射，则商空间X/E是T_2的。

证明 若商空间X/E是T_2的，要证明E是$X\times X$中的闭集，只须证明对于任意的x_1与$x_2\in X$，当$(x_1, x_2)\bar{\in} E$时，有X中的开集G_1与G_2使得$(x_1, x_2)\in G_1\times G_2$，同时$(G_1\times G_2)\cap E=\varnothing$即可。

事实上，由$(x_1,x_2)\bar{\in}E$即知$\widetilde{x_1}\neq\widetilde{x_2}$，而已知$X/E$是$T_2$的，所以存在开集$V_1$与$V_2$使之合于条件：$\widetilde{x_1}\in V_1$，$\widetilde{x_2}\in V_2$，$V_1\cap V_2=\varnothing$。

由商拓扑的定义知道$P^{-1}[V_1]$与$P^{-1}[V_2]$就是X的开集，此外还满足条件：$x_1\in P^{-1}[V_1]$，$x_2\in P^{-1}[V_2]$，$P^{-1}[V_1]\cap P^{-1}[V_2]=\varnothing$。注意到等式$P^{-1}[V_1]\cap P^{-1}[V_2]=\varnothing$正说明了对于任意的$y_1\in P^{-1}[V_1]$与任意的$y_2\in P^{-1}[V_2]$恒有$(y_1, y_2)\bar{\in}E$。故$G_1=P^{-1}[V_1]$，$G_2=P^{-1}[V_2]$即为所求。

若E是$X\times X$中的闭集，P是开映射，设$\widetilde{x_1}$，$\widetilde{x_2}$是X/E中不同的任意两点，那么就有$(x_1, x_2)\bar{\in}E$，因此存在X中的开集G_1，G_2使得$(x_1,x_2)\in G_1\times G_2$并且$(G_1\times G_2)\cap E=\varnothing$。后一等式说明对于任意的$y_1\in G_1$与任意的$y_2\in G_2$恒有$\widetilde{y_1}\neq\widetilde{y_2}$，所以$P[G_1]\cap P[G_1]=\varnothing$。显然$P[G_1]$，$P[G_2]$就是$\widetilde{x_1}$，$\widetilde{x_2}$各自的开邻域并且不相交。说明$X/E$是$T_2$的。

〔证完〕

第三章　习　题

1．设X与Y是两个拓扑空间，$X\times Y$是积空间，$A\subset X$，$B\subset Y$，证明

$$(A\times B)^- = A^- \times B^-;$$

$$(A\times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ。$$

并指出$(A\times B)'$与$A'\times B'$满足怎样的包含关系？

2．对每一个自然数n，X_n是一个拓扑空间$\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}}$ 是积空X_n间，$\varnothing\subsetneqq A_n\subsetneqq X_n$，试问

① $(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} A_n)^\circ = \underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} A_n^\circ$ 成立吗？

② $(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} A_n)^- = \underset{n=1}{\overset{8}{\times}} A_n^-$ 成立吗？

3．若D表示散空间$\{0, 1\}$，A是无限集，对每个$a\in A$，$X_a = D$。

① 积空间$\underset{a\in A}{\times} X_a$是散空间吗？

② 令$M = \{x e \underset{a\in A}{\times} X_a$，且$x$至多有有限个坐标$x_a = 1\}$，证明$M$是积空间$\underset{a\in A}{\times} X_a$的稠密子集。

③ 若积空间$\underset{a\in A}{\times} X_a$是第一可数的，那么$A$的势呢多大？此时积空间有可数稠密子集吗？

4．试证：对于$i\leqslant 3\frac{1}{2}$，T_i空间的乘积空间是T_i的。

*5．举例说明正规空间的乘积空间可以不是正规的。

※6．试证：对于$i\leqslant 4$，当非气的乘积空间$\times\{X_a : a\in A\}$

是T_i空间时，每一个坐标空间X_s必是T_i的。

*7. 证明连通空间的积空间是连通的。

8. 设$f: X\to Y$与$g: Y\to Z$都是连续的满映射，证明：当$g\circ f$是商映射时，g一定是商映射，并举例说明f可以不是商映射。

*9. 设X是拓扑空间，在X上定义关系E如下：

$$xEy \quad 当且仅当 \{x\}^- = \{y\}^-,$$

证明E是等价关系，并且商空间X/E是T_0的。

10. 设R代表通常的实数空间，Z代表整数集，令$f: R\to Z$如下

$$当 n\leqslant x<n+1 时，f(x)=n.$$

请指出由R与f所决定的、Z上的商拓扑$\mathscr{T}$。

11. 将上题中的R换成Sorgenfrey直线K，请指出相应的商拓扑。

第四章 紧 性

对一般拓扑空间，我们已做过广泛的讨论，深入地研究应该是对于更具体一些的空间分门别类地进行。在各类拓扑空间中，相比较而言，紧空间是相当重要的一类。它是在1923年首先由*Alexandroff*和*Urysohn*提出来的。在同一时期还有*Fietoris*，*Kuratowski*，四十年代以后有*Bourbaki*，*Mrowka*，*Arhangelskii*等数学家做了大量的工作与深入的研究。追述起起，这类空间的最初的一例应该是我们非常熟知的实数直线上的有界闭集在数学分析中，有著名的*Heine－Borel－Lebesgue*定理：对于实数空间中的有界闭集来说，每一个开复盖都有有限子复盖。将这一重要性质抽象出来，称之为紧性，赋予拓扑空间，就得到我们在本章要着重讨论的紧空间。在这一章里，我们同时还要介绍与紧性有密切联系的几种性质，它们是可数紧、序列式紧、*Bolzano－weierstrass*性质以及局部紧。

§1 紧 空 间

定义1 一个拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称作紧的（*compact*），是指X的每一个开复盖都有有限子复盖。换句话说，只要$\mathscr{A}$是X的一族开集，并且$\bigcup\{A: A\in\mathscr{A}\}=X$，那么一定存在有限族$\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，使得$\bigcup\{A: A\in\mathscr{B}\}=X$成立。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的一个子集M叫作紧的，是指就相

对拓扑而言空间M是紧的。根据相对拓扑的定义，空间M的开集形如$M\cap U$，其中$U\in\mathscr{T}$。我们容易看出，M是紧集的充要条件是：如果集族$\mathscr{A}\subset\mathscr{T}$满足条件$\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}\supset M$，那么一定存在某个有限子族$\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，也满足条件$\bigcup\{A:A\in\mathscr{B}\}\supset M$。

举几个例子。实数空间中的有界闭集，特别是有界闭区间$[a, b]$，是紧的。当X是有限个点组成的或X是无限集但$\mathscr{T}$是有限族时，$(X, \mathscr{T})$是紧的。只以有限集为闭的真子集时，空间也是紧的。$|X|\geqslant\aleph_0$的散空间X不是紧的。

下面我们分别采用闭集、网、基和子基等术语给出紧性的各种等价条件。

定理4.1 设$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间，则X是紧空间的充要条件是任何具有有限交性质的闭集族一定有非空的交（一个集族具有有限交性质是指该族中任意有限个集的交都是非空的）。

证明 先证必要性。设X是紧空间，$\mathscr{T}=\{F_i:i\in I\}$是具有有限交性质的一族闭集，我们要证明$\bigcap\{F_i:i\in I\}\neq\varnothing$。用反证法。

假设

$$\bigcap\{F_i:i\in I\}=\varnothing$$

那么根据 *De Morgan* 公式就有等式

$$\bigcup\{X-F_i:i\in I\}=X$$

成立，于是$\{X-E_i:i\in I\}$就应该有有限子复盖，无妨设$\{X-F_i:i=1, 2, \cdots, n\}$使得

$$\bigcup_{i=1}^{n}(X-F_i)=X$$

这样就推出等式

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \phi$$

与$\mathscr{F}$的有限交性质相矛盾。

充分性的证明依然主要运用 De Morgan公式，我们留给读者自己去完成。

推论 紧空间的闭子集是紧的。

定理4.2 拓扑空间 X是紧的，当且仅当X中每一个网有聚点。

证明 必要性。设$S=\{x_n, n\in D\}$是X中的网。令

$$F_i=\overline{\{x_n: n\geqslant i\}}$$

得到一族闭集$\{F_i: i\in D\}$，并且具有有限交性质，因此

$$\bigcap\{F_i: i\in D\}\neq\phi$$

容易证明每一点$x\in\bigcap\{F_i: i\in D\}$都是网$S$的聚点。这是因为假若$x$不是$S$的聚点，那么$x$就有一个邻域$U$以及某个$i_0\in D$，使得

$$U\cap\{x_n: n\geqslant i_0\}=\phi$$

从而$x\overline{\in}F_{i_0}$，更有$x\overline{\in}\bigcap\{F_i: i\in D\}$。

充分性。设$\mathscr{F}$是X中任意一族具有有限交性质的闭集。取$\mathscr{F}$中有限个元素之交，所有这种交组成的集族记作$\mathscr{F}^*$。显然$\mathscr{F}^*$也是闭集族、具有有限交性质，并且$\mathscr{F}^*\supset\mathscr{F}$。

由于$\mathscr{F}^*$中任何二元素之交仍属于$\mathscr{F}^*$，所以$(\mathscr{F}^*, \subset)$是定向集。对每一个$F\in\mathscr{F}^*$取点$x_F\in F$，就得到X中的一个网$S=\{x_F, F\in\mathscr{F}^*\}$。依据题设条件，$S$有聚点，设为$x$，现在证明$x\in\bigcap\mathscr{F}^*$。这是因为对于每一个$F\in\mathscr{F}^*$来说，网$S$终于在$F$中，而$F$又是闭集，所以$S$的聚点$x\in F$。既然$\bigcap\mathscr{F}^*\neq$

ϕ，当然更有$\bigcap\mathscr{F}\neq\phi$。故$X$是紧的。

〔证完〕

注意到网S以x为聚点的充要条件是S有子网收敛于x(参看定理2.14)，所以有等价命题：拓扑空间X是紧的，当且仅当X中每一个网都有收敛子网。

定理4.3 拓扑空间X是紧的，当且仅当下述条件之一成立：

(1) X的每一个无限子集都有完全聚点；

(2) 每一个递减的、非空闭集的超限序列都有非空的交换言之，如果

$$F_0\supset F_1\cdots\supset F_\xi\supset\cdots\cdots\qquad(\xi<\alpha)$$

其中每一个$F_\xi\neq\phi$并 $\overline{F_\xi}=F_\xi$，则

$$\bigcap_{\xi<\alpha}F_\xi\neq\phi。$$

在证明之前，我们先介绍一下什么叫完全聚点。拓扑空间中一点x_0叫作某个子集A的完全聚点(complete accumulation point)，是指x_0的每一个开邻域U都满足条件$|U\cap A|=|A|$。当$|A|>1$时，A的完全聚点一定是A的聚点。反之，聚点却未必一定是完全聚点。

证明 (一) X紧→(1)。假设无限集A没有完全聚点，那么对于每一点$x\in X$，就可以选取x的一个开邻域U_x，使得$|U_x\cap A|<|A|$。集族$\{U_x: x\in X\}$是紧空间X的开覆盖，因此存在某个有限子覆盖，设是$\{U_i: i=1, 2, \cdots, n\}$。显然

$$\bigcup_{i=1}^{n}(U_i\cap A)=A$$

所以应该有等式

$$\sum_{i=1}^{n} |U_i \cap A| \geqslant |A|$$

但这是不可能的，因为 $m=|A|\geqslant\aleph_0$，而每一个 $m_i=|U_i\cap A|<|A|=m$，从而

$$\sum_{i=1}^{n} m_i < m$$

由此矛盾就能推知当 X 是紧空间时，其每一个无限子集 A 都有完全聚点。

（二）(1)→(2)。设 $\{F_\xi\}_{\xi<\alpha}$ 是一个由非空闭集组成的递减超限列。因为除去列中相等的重复项，使其成为严格递减的，同时再取其敛尾子列时，整个列的交并不改变，所以我们无妨认为 α 是某个满足条件 $cf\,\omega_\tau=\omega_\tau$ 的初始数 ω_τ，并且当 $\xi<\eta<\alpha$ 时，$F_\xi\supsetneqq F_\eta$。现在来证明由非空闭集组成的、严格递减的超限列

$$F_0\supset F_1\supset\cdots\supset F_\xi\supset\cdots\cdots \qquad (\xi<\omega_\tau)$$

的交是非空的，即要证明

$$\bigcap_{\xi<\omega_\tau} F_\xi \neq \phi.$$

为此，对每一个 $\xi<\omega_\eta$，任取一点 $x_\xi\in F_\xi-F_{\xi+1}$。因为上述超限列是严格递减的，所以这样的点总是存在的，并且当 $\xi\neq\eta$ 时，必然是 $x_\xi\neq x_\eta$。根据条件(1)，集合 $E=\{x_\xi:\xi<\omega_\tau\}$ 必有完全聚点 x^*，于是

$$x^*\in\bigcap_{\xi<\omega_\eta} F_\xi$$

因为假若 $x^*\overline{\in} F_{\xi_0}$，则 $X-F_{\xi_0}$ 就是 x^* 的一个开邻域。又因为 x^* 是 E 的完全聚点，就应存在着 $\xi>\xi_0$ 使得 $x_\xi\in X-F_{\xi_0}$

亦即$x_\xi \in F_{\xi_0}$，但这与$\{F_\xi\}_{\xi<\omega_\tau}$的递减性是矛盾的。

（三）（2）→X紧，假设X不是紧的，那么就会存在具有有限交性质、但交是空集的闭集族。今取势为最小而满足此条件的一个闭集族$\mathscr{F}$，把$\mathscr{F}$良序化，并设其序型是初始数：

$$F_0, \ F_1, \ \cdots\cdots F_\xi, \ \cdots\cdots \qquad (\xi<\omega_\tau)$$

对每一个$\xi<\omega_\tau$，令

$$E_\xi=\bigcap_{\eta<\xi} F_\eta$$

于是得到递减的、闭集的超限列

$$E_0 \supset E_1 \supset \cdots \supset E_\xi \supset \cdots\cdots \qquad (\xi<\omega_\tau)$$

其中每一项$E_\xi \neq \phi$，但是

$$\bigcap_{\xi<\omega_\tau} E_\xi = E_\xi = \phi$$

说明条件（2）不成立。故条件（2）成立时，X是紧的。

〔证完〕

定理4.4 设$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间，$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的一个基底，则X是紧空间的充要条件是由$\mathscr{B}$中元素组成的、X的任何一个复盖都有有限子覆盖。

证明 只需证明充分性。

设$\mathscr{C}$是X的任意一个开覆盖，为了寻求$\mathscr{C}$的有限子覆盖，我们考虑集族

$$\mathscr{A}=\{A: A\in\mathscr{B}\text{并且}A\text{是某个}C\in\mathscr{C}\text{的子集}\}$$

由于$\mathscr{B}$是拓扑基，所以集族$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$一定覆盖了$X$，根据题设条件，$\mathscr{A}$中必有有限多个元素$A_1$，$A_2$，…，$A_n$覆盖了$X$。再对每一个$i=1, 2, \cdots n$，取一个$C_i\in\mathscr{C}$满足条件$C_i\supset A_i$，这样得到的有限族$\{C_i: i=1, 2, \cdots\cdots, n\}$就是$\mathscr{C}$的有限子复

盖。

〔证完〕

这个定理说明拓扑空间的紧性取决于拓扑基的紧性。下面我们进一步把拓扑空间的紧性归结成拓扑子基的紧性。

定理4.5 （*Alexander*）设$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间，$\mathscr{S}$是$\mathscr{T}$的一个子基，则X是紧空间的充要条件是由$\mathscr{S}$的元素组成的、X的任何一个覆盖都有有限子覆盖。

证明 同样只需证明充分性。

为了叙述方便起见，我们取下面的通俗说法：一个集族叫作“不够用的”，是指整个集族盖不住X；而集族叫作“有限不够用的”，是指这个集族的任何有限子族都盖不住X。在此约定下，空间X是紧的就等价于凡是“有限不够用的”开集族一定是“不够用的”。

现在转入充分性的证明。

因为$\mathscr{S}$是拓扑子基，那么

$$\mathscr{B}=\{B: B\text{是}\mathscr{S}\text{中有限个元素的交}\}$$

便是拓扑基。根据定理4.4，只需证明$\mathscr{B}$的任何一个“有限不够用的”子族$\mathscr{U}$是“不够用的”就行了。为此，将$\mathscr{U}$扩大成“有限不够用的”、$\mathscr{B}$的极大子族$\mathscr{V}$。于是对任意的$B\in\mathscr{B}-\mathscr{V}$，$\mathscr{V}\cup\{B\}$就不是“有限不够用的”了。以下证明这个扩大了的$\mathscr{V}$还是“不够用的”，由此就推知$\mathscr{U}$是“不够用的”。分两步进行。

(i) 设$B=\bigcap_{i=1}^{n} S_i$，其中$S_i\in\mathscr{S}$，$i=1, 2, \cdots, n$，则当$B\in\mathscr{V}$时，必存在着某个S_i，使$S_i\in\mathscr{V}$。

仅就$n=2$的情形用反证法证之。设$B=S_1\cap S_2$，并且$S_1\in$

$\mathscr{V}$，$S_2\in\mathscr{V}$。根据$\mathscr{V}$的极大性，$\mathscr{V}$中必有有限个元$B_1^{(1)}$ $B_2^{(1)}$，……$B_n^{(1)}$和$B_1^{(2)}$，$B_2^{(2)}$，…，$B_m^{(2)}$使之合于条件

$$S_1\cup(\bigcup_{i=1}^{n}B_i^{(1)})=X。$$

$$S_2\cup(\bigcup_{i=1}^{m}B_i^{(2)})=X。$$

从而

$$(S_1\cap S_2)\cup(\bigcup_{i=1}^{n}B_i^{(1)})\cup(\bigcup_{i=1}^{m}B_i^{(2)})=X$$

于是$B=S_1\cap S_2$就不得属于$\mathscr{V}$（否则推出$\mathscr{V}$中有限个元B，$B_1^{(1)}$，…，$B_n^{(1)}$，$B_1^{(2)}$，…，$B_m^{(2)}$覆盖了X）。

(ii) 由(i)可见，对每一个$B\in\mathscr{V}$，都存在$\mathscr{S}$中的元素S_B，使得$S_B\supset B$，$S_B\in\mathscr{V}$。一方面，因为$\mathscr{S}^*=\{S_B:B\in\mathscr{V}\}$是$\mathscr{V}$的子族，所以$\mathscr{S}^*$是"有限不够用的"；另一方面，因为$\mathscr{S}^*\subset\mathscr{S}$，所以由题设推知$\mathscr{S}^*$是"不够用的"，即

$$\bigcup\{S_B:B\in\mathscr{V}\}\neq X$$

这样就知道$\mathscr{V}$更是盖不住X。

〔证完〕

定理4.6 设A是拓扑空间X的一个紧子集，y是拓扑空间Y的一个点，如果W是积空间$X\times Y$中集$A\times\{y\}=\{(a,y):a\in A\}$的一个邻域，则存在$X$的开集$U$与点$y$的开邻域$V$，使得$A\times\{y\}\subset U\times V\subset W$。

证明 按照积拓扑的意义，对于每一个$a\in A$，存在X的开集U_a与Y的开集V_a，使得$(a,y)\in U_a\times V_a\subset W$，于是$A\times\{y\}\subset\bigcup_{a\in A}(U_a\times V_a)\subset W$。因为$A$是紧的，而$\bigcup_{a\in A}U_a\supset A$，应

该存在有限多个U_{a_1}, …, U_{a_n}, 其中$a_i \in A$, $i=1,2, \cdots, n$, 并且满足条件 $\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \supset A$。令

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}, \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

那么U与V即为所求。

〔证完〕

定理4.7 (*Kuratowski*) 设X是拓扑空间，则下列条件相互等价：

(1) X是紧的；

(2) 对于每一个拓扑空间Y，投影$P: X\times Y \to Y$是闭的(即当F是$X\times Y$中闭集时，$P[F]$是Y中闭集)；

(3) 对于每一个T_1型的正规空间Y，投影$P: X\times Y\to Y$是闭的。

证明 (1)→(2)。要证明P是闭的，应该证明对于积空间$X\times Y$的任意一个闭集F，$P[F]$是Y的闭集，而这只需证明$Y-P[F]$是开集。事实上，若$y\in Y-P[F]$，因$(X\times Y)-F$是积空间中集$X\times\{y\}$的开邻域，根据定理4.6，存在Y的开集V，使得$X\times\{y\}\subset X\times V\subset(X\times Y)-F$。由此容易推出$y\in V\subset Y-P[F]$，这就证明了$Y-P[F]$是$Y$的开集。

(2)→(3)。显然。

(3)→(1)假设X非紧，$\{F_i: i\in I\}$是空间X中具有有限交性质的一个闭集族，并且满足条件

$$\bigcap\{F_i: i\in I\}=\varnothing。$$

首先，我们在集合X之外任取一点y_0，考虑$Y=X\cup\{y\}$，令$\mathscr{S}$是由X中所有单点集以及所有形如$\{y_0\}\cup F_i$,

$i\in I$，的集合组成的集族。以$\mathscr{S}$作子基定义Y上的一个拓扑$\mathscr{T}$，这样得到的拓扑空间（Y，$\mathscr{T}$）一定是T_1型的正规空间。事实上，首先，因为在空间Y中，一切不含y_0的集合都是开，的特别X是开的，所以单点集$\{y_0\}$是闭的。又因为$\bigcap_{i\in I}F_i=\phi$，所以对于任意给的一点$x\in X$，一定存在某个F_i，$x\overline{\in}F_i$，于是从开集$X-\{x\}$与开集$\{y_0\}\cup F_i$的并$(X-\{x\})\cup(\{y_0\}\cup F_i)=Y-\{x\}$是开集推知单点集$\{x\}$是闭的。故$Y$是$T_1$型的。其次，设$A_1$与$A_2$是$Y$中不相交的两个闭集。显然二者之中至少有一个不含点$y_0$，无妨设$y_0\overline{\in}A_1$，于是$A_1$既开且闭，取$V_1=A_1$，$V_2=Y-A_1$，那么$V_1$与$V_2$就分别是$A_1$与$A_2$的、不相交的开邻域，因此$Y$又是正规的。

在作了上述一些准备工作之后，下面证明由条件（3）可以推出

$$\bigcap\{F_i: i\in I\}\neq\phi$$

与假设矛盾。

考虑空间$X\times Y$中的闭集$F=\overline{\{(x,\ x): x\in X\}}$。现在利用条件（3），知$P[F]$是$Y$中的闭集，而且显见地有$X\subset P[F]$。另一方面$\{F_i: i\in I\}$的有限交（非空）性质保证了单点集$\{y_0\}$不是空间$Y$中的开集，所以$y_0\in P[F]$（否则$y_0\overline{\in}P[F]$，则$X=P[F]$，$X$便是$Y$中的闭子集，$\{y_0\}$便是开集了）。这样，便有一个点$x_0\in X$使得$(x_0,\ y_0)\in F$。根据定义

$$F=\overline{\{(x,\ x): x\in X\}}$$

对于x_0的每个开邻域U以及每个$F_i(\in\{F_i: i\in I\})$都成立着关系式

$$[U\times(\{y_0\}\cup F_i)]\cap\{(x,x):x\in X\}\neq\varnothing$$

因此，便存在着（依赖于U及F_i的）点$x^*\in X$合于

$$(x^*,x^*)\in U\times(\{y_0\}\cup F_i)$$

注意到$y_0\in X$，推知

$$x^*\in U\cap F_i$$

至此证明了x_0的每一个开邻域U与F_i的交非空，又因F_i是闭集，故$x_0\in F_i$，（对每一个$i\in I$），即$x_0\in\cap\{F_i:i\in I\}\neq\phi$。

〔证完〕

§2 紧性与分离性

对于$Hausdorff$空间，紧性会导致出许多很有价值的结果。先从下列定理开始

定理4.8 设X是$Hausdorff$空间，如果A是一个紧子集，点$x\overline{\in}A$，则存在两个开集U与V使得$A\subset U$，$x\in V$且$U\cap V=\varnothing$。

证明 对于每一点$a\in A$，因为X是$Hausdorff$空间，所以存在a的与x的不相交的开邻域U_a与V_a。开集族$\{U_a:a\in A\}$覆盖了紧集A，它应该有某个有限子覆盖，无妨设为$\{U_{a_i}:=1,2,\cdots,n\}$。相对应的有$x$的开邻域$V_{a_1}$，$V_{a_2}$，$\cdots V_{a_n}$使得$U_{a_i}\cap V_{a_i}=\phi$，$i=1,2,\cdots,n$，令

$$U=\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}\qquad V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{a_i}$$

那么U与V就是所要求的开集。

〔证完〕

推论 $Hausdorff$空间中的紧子集都是闭集。

定理4.9 设X是$Hausdorff$空间，如果A与B是不相交的两个紧子集，则存在集A与集B的不相交的开邻域。

证明 根据定理4.8，对每一点$a\in A$有a的开邻域U_a与B的开邻域V_a，使得$U_a\cap V_a=\varnothing$。开集族$\{U_a: a\in A\}$是A的覆盖，应有某个有限子族$\{U_{a_i}: i=1, 2, \cdots, n\}$，亦覆盖了$A$，由此得到

$$U=\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \qquad V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

分别是A与B的不相交的开邻域。

〔证完〕

推论 紧的T_2空间是正规的。

这是一个很强的结果。由此即知：一个紧空间，若是T_2分离的，则亦是T_4分离的。

在不假定T_2分离性的情形，下列类似的定理成立。

定理4.10 设X是正则空间，如果A是一个紧子集，U是A的一个邻域，则存在A的闭邻域V使得$V\subset U$。

证明 因为X是正则的，所以对每一点$a\in A$有a的开邻域W_a，使得$\overline{W_a}\subset U$。此时开集族$\{W_a: a\in A\}$复盖了A，自然应该有有限子族$\{W_{a_i}: i=1, 2, \cdots, n\}$，也复盖了$A$。显然

$$V=\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W_{a_i}}$$

就是要求的闭邻域。

〔证完〕

推论 紧的正则空间是正规的。

定理4.11 设X是完全正则空间，如果A是紧子集，U是

A的一个邻域，则存在由X到闭区间〔0，1〕的一个连续函数f，满足条件

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\in A\text{时}\\ 0, & \text{当}x\in X-U\text{时}\end{cases}$$

证明 因为X是完全正则的，所以对于每一点$a\in A$，有连续函数$g_a: X\to$〔0，1〕，满足条件

$$g_a(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x=a\text{时}\\ 0, & \text{当}x\in X-U\text{时}\end{cases}$$

令$W_a=\{x: g_a(x)>\frac{1}{2}\}$，显然$W_a$是点$a$的一个开邻域。若定义

$$h_a(x)=min\{2g_a(x),\ 1\}$$

于是，对每一个$a\in A$，相应是h_a都是由X到〔0，1〕的连续函数，并满足条件

$$h_a(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\in W_a\text{时}\\ 0, & \text{当}x\in X-U\text{时}\end{cases}$$

集族$\{W_a: a\in A\}$是紧集A的开覆盖，应有某个有限子复盖$\{W_{a_i}: i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，此时相应的$h_{a_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，合于条件

$$h_{a_i}(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\in W_{a_i}\text{时}\\ 0, & \text{当}x\in X-U\text{时}\end{cases}$$

最后，我们令

$$f(x)=max\{h_{a_1}(x),\ h_{a_2}(x),\ \cdots h_{a_n}(x)\}$$

容易看出，f就是要求的连续函数。

〔证完〕

借助定理4.8的推论，我们还有如下的结果。

定理4.12 设f是由紧空间X到拓扑空间Y上的一个连续映射，则下列各命题成立：

(1) Y是紧的；

(2) 当Y是T_2空间时，f是闭映射；

(3) 当Y是T_2空间并且f是一对一的时候，f是同胚映射。

证明 (1) 设$\mathscr{A}$是Y的任意一个开覆盖，那么集族$\{f^{-1}[A]: A\in\mathscr{A}\}$就是$X$的一个开覆盖。又因为$X$是紧的，所以存在着有限族$\{f^{-1}[A_i]: i=1, 2, \cdots, n\}\subset\{f^{-1}[A]: A\in\mathscr{A}\}$覆盖了$X$，由此可知集族$\{A_i: i=1,2, \cdots\cdots, n\}$就是$\mathscr{A}$的有限子族并覆盖了$Y$。

(2) 要证明f是闭的，只需要证明对于X的任意一个闭集A，$f[A]$是Y的闭集。事实上，因为X是紧的，而A是X的闭子集，所以A是紧的。根据(1)，$f[A]$是紧的，又因为Y是T_2空间，所以紧集$f[A]$就是Y的闭子集。

(3) 因为f是一对一的满映射，所以逆映射$f^{-1}: Y\to X$存在，并且对于X的闭集A来说$(f^{-1})^{-1}[A]=f[A]$是Y的闭集，所以f^{-1}是连续的。从而f是同胚映射。

〔证完〕

推论 设$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$是同一个集合X上的拓扑，$\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}_2$，如果已知$(x, \mathscr{T}_1)$是紧的$(x, \mathscr{T}_2)$是$T_2$的，那么必有等式$\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$成立。

为了证明这个推论，只需考虑空间$(X, \mathscr{T}_1)$到$(X, \mathscr{T}_2)$的恒同映射f，$f(x)=x$，这是一个同胚映射。推论本身指出，局限在T_2型拓扑来看，紧拓扑是极小的。

§3 紧空间的乘积

关于紧空间的乘积，有著名的$Tychonoff$定理，这是一个非常有用的定理。本节讨论$Tychonoff$定理以及有关的推论，同时指出$Tychonoff$定理与选择公理是等价的。

定理4.13 ($Tychonoff$) 一族紧空间的乘积（就积拓扑而言）是紧的。

证明 设$Y = \times\{X_a : a \in A\}$，其中每一个$X_a$是紧空间，$Y$具有积拓扑$\mathscr{T}$。令$\mathscr{S}$是由所有形如$P_a^{-1}[U]$的集所组成的集族，此处$U$是$X_a$中的开集，$P_a$表示由$Y$到$X_a$的投影，$a \in A$。于是$\mathscr{S}$就是$\mathscr{T}$的标准子基底。根据$Alexander$定理，为了要证明$Y$是紧的，只须证明：若$\mathscr{A}$是由$\mathscr{S}$的元素组成的，"有限不够用的"集族，则$\mathscr{A}$就盖不住$Y$。

对每一个$a \in A$，令

$$\mathscr{D}_a = \{U : U\text{是}X_a\text{中的开集并且使得}P_a^{-1}[U] \in \mathscr{A}\}$$

由于$\mathscr{A}$对于Y是"有限不够用的"，决定了$\mathscr{D}_a$对于X_a是"有限不够用"，又知道X_a是紧的，所以$\mathscr{D}_a$盖不住X_a。我们对每一个$a \in A$，取

$$x_a \in X_a - \bigcup\{U : U \in \mathscr{D}_a\}$$

得到以x_a为坐标的点$x = \{x_a\}$，显然

$$x \in Y - \bigcup\mathscr{A}$$

即$\mathscr{A}$盖不住Y。　　　　证完

定理4.13指出紧空间的乘积是紧的。反过来，如果$Y = \times\{X_a : a \in A\}$是紧的，则由$X_a = P_a[Y]$是$Y$的连续象，又能推出每一个坐标空间$X_a$都是紧的。从而得结论：乘积空间是

紧空间的充要条件是它的每一个坐标空间都是紧的。

下面介绍几个有用的推论。

推论 1 设$Y=\times\{X_a: a\in A\}$是积空间，如果有无限多个坐标空间X_a是非紧的，则Y的紧子集一定无内点。

证明 设C是Y的一个紧子集，要证明C没有内点，我们用反证法，假设x是C的一个内点，于是必有某个基本开集

$$U=\bigcap\{P_a^{-1}[V_a]: a\in B\}$$

满足条件

$$x\in U\subset C$$

其中B是A的有限子集，V_a是X_a中的开集。

因为C是紧集，而当$a\in A-B$时，

$$P_a[C]=X_a$$

由定理4.12知，X_a是紧的，其中$a\in A-B$。与题设条件矛盾。

〔证完〕

推论指出，当非紧的坐标空间相当多（$\geqslant\aleph_0$）时，积空间中的紧集就都是疏的了。

推论 2 （*Heine-Borel-Lebesgue*）在n维欧几里得空间中，子集A是紧的当且仅当A是有界闭集。

证明 必要性。因为欧几里得空间E^n是T_2的，由A的紧性就推出A是闭的。另外，当A是紧集时，则由盖住A的开球族$\{S(a,1): a\in A\}$中可以取有限个开球也盖住A，从而得知A是有界的。

充分性，我们已经知道每一个实数闭区间$[a,b]$是紧的。当A是有界闭集时，对于每一个$i=1,2,\cdots,n$，集$B_i=P_i[A]$总是有界的（B_i的直径$\leqslant A$的直径），从而可取闭区间$[a_i,b_i]\supset B_i$，由此推出

$$A \subset \mathop{\times}_{i=1}^{n} B_i \subset \mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

并且A是紧集 $\mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$的闭子集，所以是紧的

〔证完〕

最后我们指出，*Tychonoff* 乘积定理与选择公理实际是等价的。事实上，定理4.13的证明本身已指出由选择公理能推出*Tychonoff* 定理，现在反过来，我们要由*Tychonoff* 定理推出选择公理。简略回顾一下历史，早在1933年 *S·Kakutani* 就提出过由*Tychonoff* 定理推出选择公理的问题，但他当时未能给出证明，只是一种猜想。下面的证明是*J. L. Kelley*在1959年给出的（见*Fund. Math.* 37卷，75－76页）。

我们对选择公理取如下表达形式：若对于每一个 $a \in A$，X_a都是非空集合，则直积

$$\times \{ X_a : a \in A \}$$

也是非空集合。

证明 首先在一切集合X_a之外任取一元，无妨记之为 Λ，令$Y_a = X_a \cup \{ \Lambda \}$，今在$Y_a$上引入拓扑$\mathscr{T}_a$，$\mathscr{T}_a$由空集$\phi$，单点集$\{ \Lambda \}$、以及$Y_a$中有限集的余集构成。这样一来，每个 $(Y_a, \mathscr{T}_a)$ 就是一个T_1型的紧空间。根据*Uychonoff* 定理，乘积空间$Q = \times \{ Y_a : a \in A \}$也是紧的。又因为$\{ \Lambda \}$是$Y_a$中的开集，于是$X_a$便是$Y_a$中的闭集，从而$Z_a = P_a^{-1}[X_a]$便是$Q$ 中的闭集。最后，因为对于A的任何有限子集B来说，$\cap \{ Z_a : a \in B \}$都是非空的（这是因为依据有限选择公理对每一个$a \in B$，我们可以取$x_a \in X_a$，另外对每一个$a \in A - B$，令$x_a = \Lambda$，这样得到的点$x = \{ x_a \}$就是$\cap \{ Z_a : a \in B \}$中的点），于是$\{ Z_a : a \in A \}$

就是紧空间Q中的、具有有限交性质的闭集族，应有非空的交，即

$$\cap\{Z_a: a\in A\}=\times\{X_a: a\in A\}\neq$$

注　在朴素集合论中，所谓给定了一个集M，乃指存在一个条件ϕ，使得对于任意一个事物x，依x是否满足ϕ，即依照$\phi(x)$的真假来唯一地决定$x\in M$或$x\overline{\in}M$。若对每一个$a\in A$，X_a都是非空集合，并且两两不相交，那么当A是无限集时，是否存在着集M使得对于每一个$a\in A$，$M\cap X_a$都是单点集呢？因为决定M的条件ϕ是否存在无法断定，所以集合M的存在性就成了问题。但当A是有限集时却能通过有限步（按数学归纳法），在每一个X_a中取定一点x_a，从而得到集合M。因此，承认有限选择公理乃是自然的。我们不准备涉及公理集合论，只指出一点：在ZF公理系统中，利用数学归纳法可以证明有限选择公理一定成立。但是当X_a的个数A无限时，即使每一个X_a都只含两个元素，也无法证明上述的M存在。当然，这并不否定在一些特殊场合可以知道M存在。例如X_a都是由一些非负整数组成的集合，那么取

$x_a=X_a$中的最小整数

就得到了一个M。

本节关于$Tychonoff$定理的讨论使我们又增加了一条与选择公理等价的命题。

§4 吉洪诺夫方体

在拓扑学中，单位闭区间$I=[0,1]$被作为一个基本的、十分重要的拓扑空间。设τ是无限集A的势，我们把乘积空间

$\times\{I_a: a\in A\}$，　　　其中$I_a=I$

记作I^{τ}，叫吉洪诺夫方体。

因为I是紧的T_2空间，所以对于任意的τ，吉洪诺夫方体I^{τ}是紧的T_2空间，从而是T_4的，自然也是$T_{3\frac{1}{2}}$的。又因为$T_{3\frac{1}{2}}$是继承性的，由此可知：吉洪诺夫方体I^{τ}的任意子空间及其同胚空间都是$T_{3\frac{1}{2}}$的。下面我们将证明其逆亦真。

定理4.14 若拓扑空间X是$T_{3\frac{1}{2}}$的，则X与某个I^{τ}中的一个子集同胚。

证明 因为X是$T_{3\frac{1}{2}}$空间，所以对每一点$x\in X$以及x的任意一个开邻域U都有连续函数$f: X\to I$使得$f(x)=0$，而当$y\in X\setminus U$时$f(y)=1$。

我们考虑一切由X到I的连续函数f构成的集合F，设$|F|=\tau$。对每一个$f\in F$取一个坐标空间$I_f=I$，建立乘积空间

$$\times\{I_f: f\in F\}$$

即是吉洪诺夫方体I^{τ}。

下面我们先建立由X到某个$\widetilde{X}\subset I^{\tau}$上的一一映射$h$，再证明这个$h$还是一个同胚。

（一）对于$x\in X$，我们令$h(x)$是I^{τ}中这样的一点$\widetilde{x}=(\widetilde{x_f})\times_f$其中$\widetilde{x_f}=f(x)$。

因为当$x\neq y$时，存在一个连续函数$f_0: X\to I$使得$f_0(x)=0$，$f(y)=1$，即$\widetilde{x}_{f_0}\neq\widetilde{y}_{f_0}$，所以$\widetilde{x}\neq\widetilde{y}$。说明$h$是由$X$到$\widetilde{X}=h[X]\subset I^{\tau}$上的一一映射。

（二）$h: X\to\widetilde{X}$是连续的。

这是由于对每一个$f\in F$，$P_f\circ h=f$是连续的。

（三）$h^{-1}: \widetilde{X}\to X$是连续的。

设$\widetilde{x}$是$\widetilde{X}$中任意一点，记$x=h^{-1}(\widetilde{x})$。今证明对于x的每一个开邻域U，存在$\widetilde{x}$的一个开邻域V使得$h^{-1}[V]\subset U$。

因为X是$T_{3\frac{1}{2}}$的，对于x以及x的开邻域U有连续函数f_0：$X\to I$使得$f_0(x)=0$，而当$y\in X\setminus U$时$f_0(y)=1$。由此推出

$$U\supset\{y:f_0(y)<1\}=(P_{f_0}\circ h)^{-1}[[0,1)]$$
$$=h^{-1}[P_{f_0}^{-1}[[0,1)]]$$

取

$$V=P_{f_0}^{-1}[[0,1)]$$

则V就是$\widetilde{x}$的一个开邻域，并且使得$h^{-1}[V]\subset U$。

〔证完〕

归结上述讨论，得结论：拓扑空间X与某个吉洪诺夫方体I^{τ}中的一个子空间同胚当且仅当X是$T_{3\frac{1}{2}}$空间。

§5 可数紧、序列式紧

定义2 拓扑空间X叫做可数紧的(*Countebly compact*)或叫复盖式列紧的，是指X的每一个可数开复盖都有有限子覆盖。

由定义直接看出，紧空间一定是可数紧的；同时具有*Lindelöf*性质的可数紧空间一定是紧的。

定理4.14 拓扑空间X是可数紧的充要条件是每一个具有有限交性质的、闭集的可数族都有非空的交。

定理4.16 拓扑空间X是可数紧的充要条件是每一个非空闭集的递减列

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots\cdots$$

一定有非空的交。

这两个定理的证明并不困难，可以仿照定理4.1与定理4.3进行。留给读者自己练习。

定理4.17 拓扑空间X是可数紧的充要条件是X的每一个无穷子集都有ω—聚点（空间X中一点x叫作某个子集A的ω-聚点是指x的每一个邻域都含有A的无穷多个点。ω—聚点一定是聚点。反之未必。但对T_1型空间来说，聚点与ω—聚点是一回事。参看定理2.21）。

证明 必要性。假设X的某个无穷子集没有ω—聚点，那么取该集的一个可数子集

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\cdots\},$$

A同样地没有ω—聚点。

对于每一个$x\in X$，有x的一个开邻域U_x使得$U_x\cap A$是有限集，从而得到X的一个开覆盖

$$\mathscr{U}=\{U_x: x\in X\},$$

当$U_x\cap A=\{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}\}$时，令

$$m=max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$$

就叫作U_x的标数。特别当$U_x\cap A=\phi$时，U_x的标数取0。我们按照标数m对U_x进行分类，标数是m的那些U_x全体记为$\mathscr{U}_m$(注意，可能有些$\mathscr{U}_m$不含任何元素），于是

$$\mathscr{U}=\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathscr{U}_m$$

令

$$W_m=\bigcup\{U_x: U_x\in\mathscr{U}_m\}$$

得到可数个开集

$$W_0, W_1, W_2, \cdots, W_m, \cdots\cdots$$

满足条件

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} W_m = X$$

并且有

$$W_0 \cap A = \phi, \quad W_m \cap A \subset \{ a_i; \ i \leqslant m \} \quad m\text{是自然数。}$$

显然X的这样一个可数开覆盖

$$\{ W_m; \ m = 0, \ 1, \ 2 \cdots \}$$

不存在有限子覆盖。这就证明了：若X有某个无穷子集无ω—聚点，则X一定不是可数紧空间。

充分性。假设X不是可数紧的，那么就有某个可数开覆盖

$$\mathscr{U} = \{ U_1, \ U_2, \ \cdots, \ U_n, \ \cdots\cdots \}$$

不存在有限子覆盖。

对每一个n，选取一点

$$x_n \in X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

并且使各个x_n彼此不同，由此得到无穷子集

$$A = \{ x_n; \ n = 1, \ 2, \ \cdots\cdots \}$$

容易证明A没有ω—聚点。这是因为对每一点$x \in X$，总有某个U_{n_0}是x的开邻域，而U_{n_0}与A的交只是有限集。这就证明了：若空间X不是可数紧的，则一定有某个无穷子集无ω—聚点。

〔证完〕

定理4.18 拓扑空间X是可数紧的充要条件是X的每一个点列$\{ x_n, \ n = 1, \ 2 \cdots\cdots \}$都有极限点（空间$X$中一点$x$叫作某个点列$\{ x_n, \ n = 1, \ 2, \ \cdots\cdots \}$的极限点，也叫聚点，是指对于$x$的任何一个邻域$U$与任意一个正整数$N$，存在某个$n \geqslant N$使得$x_n \in U$。当$X$的每一个点列都有极限点时，称$X$具有 *Bolzano*

cierstrass性质）。

证明 必要性。设$\{x_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$是一个点列，那么只会有下列两种情形：

(1) 点列$\{x_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$只有有限多个点，于是必有一点$x$对无穷多个自然数$n$保持$x_n=x$，此时$x$就是已知点列的极限点。

(2) 点列$\{x_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$含有无穷多个点，根据定理4.17，无穷点集$\{x_n: n=1, 2, \cdots\cdots\}$有$\omega$—聚点$x$，此$x$就是已知点列的极限点。

充分性。要证明X是可数紧的，根据定理4.17，只须证明X的任意一个无穷子集A都有ω—聚点。这是容易办到的。因为可以取A中可数无穷多个点排成序列$\{x_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$，按照题设条件，它有极限点，这个极限点就是集$A$的$\omega$—聚点。

〔证完〕

定义 3 拓扑空间X叫作序列式紧的（*Sequentially ompact*），是指X的每一个点列都有一个收敛子列。

因为点列有收敛子列时，子列的极限当然是已给点列的极限点，所以，序列式紧空间一定具有*Bolzano*－*Weierstrass*性质，从而一定是可数紧的。

定理4.19 若X是可数紧的、满足第一可数公理的拓扑空间，则X是序列式紧的。

证明 设$\{x_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$是$X$中的一个点列，要证明它有收敛子列。

因为X是可数紧的，所以$\{x_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$有极限点，取其一个设为$x$。我们取$x$的一个可数邻域基，无妨认为它

还是单调递减的，

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_k \supset \cdots\cdots$$

对每一个正整数k，选取点列$\{x_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$中的一项

$$x_{n_k} \in V_k$$

并保持$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\cdots$，由此得到已知点列的一个收敛子列$\{x_{n_k}, k=1, 2, \cdots\cdots\}$。

〔证完〕

推论 若X是序列式紧（或可数紧）的、满足第二可数公理的拓扑空间，则X是紧的。

定理4.19及其推论告诉我们，对于满足第一可数公理的拓扑空间来说，可数紧性与序列式紧性是等价的；对于满足第二可数公理的拓扑空间来说，可数紧、序列式紧、乃至紧性，三者是一回事。但在一般情况下，序列式紧空间未必一定是紧的。例如$[0, \omega_1)$在序拓扑意义下是可数紧的而且满足第一可数公理，从而是序列式紧的，但$[0, \omega_1)$不是紧空间。也能举出反例，说明紧空间可以不是序列式紧的。

§6 局部紧空间

定义 4 拓扑空间X叫作局部紧的(Locally compact)，是指X的每一点都至少有一个邻域是紧的。

容易看出，紧空间是局部紧的；实数空间虽然不是紧的，但却是局部紧的；散空间是局部紧的；局部紧性质对闭子集是继承的，即局部紧空间的每一个闭的子空间是局部紧的，这是因为，若A是X中的闭集，当U是点$x \in A$在空间X中的紧邻域

时，$U\cap A$就是点x在子空间A中的紧邻域。

局部紧空间若同时满足某种分离性条件，也会有许多特殊的表现，这与紧空间颇为类似。

定理4.20 设X是一个局部紧的正则（或局部紧的T_2）空间，如果$x\in X$，U是x的一个邻域，则存在x的一个紧的闭邻域V使得$V\subset U$。

证明 (1) 当X是局部紧的正则空间时，先取x的一个紧邻域C，令

$$W=(C\cap U)^{\circ}$$

显然W是x的一个开邻域。因为X是正则的，存在x的闭邻域V使得

$$V\subset W\subset C$$

从而V就是x的紧的闭邻域，且$V\subset U$。

(2) 当X是局部紧的T_2空间时，同样先取x的一个紧邻域C，于是

$$\overline{W}=(C\cap U)^{\circ}$$

是x的开邻域。因为X是T_2的，紧集C必是闭集，所以

$$\overline{W}\subset C$$

并且$\overline{W}$作为子空间来说还是正则的、紧的。

在空间$\overline{W}$中，因为W是x的邻域，从（1）知道，存在x的某个紧的闭邻域V使得$V\subset W\subset U$，自然V也是x在空间X中的紧的闭邻域。

〔证完〕

上述定理说明，局部紧的、正则（或T_2）空间中的每一点都有一个由紧的闭邻域构成的邻域基。

推论 1 在T_2型（或正则）空间中，局部紧性质对开子集

中是继承的。

推论 2 局部紧的T_2型空间是T_3的。

定理4.21 设X是局部紧的正则空间，如果A是一个紧子集，U是A的一个邻域，则

(1) 存在A的、紧的闭邻域V使得$V\subset U$。

(2) 当A是闭的紧子紧时，对于 (1) 中的V存在由X到$[0,1]$的连继函数f，满足条件

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\in A\text{时}\\ 0, & \text{当}x\in X-V\text{时}\end{cases}$$

证明 (1) 根据定理4.20，对每一点$a\in A$，存在a的紧的闭邻域$V_a\subset U$，集族$\{V_a: a\in A\}$中必有有限多个V_{a_i}，$i=1, 2, \cdots, n$，使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overset{\circ}{V}_{a_i}$$

令

$$V=\bigcup_{i=1}^{i}V_{a_i}$$

则V就是要求的紧的闭邻域

(2) 由于此时子空间V是紧的正则的，从而是正规的，于是对于空间V中的闭集A和A的邻域V°，存在V到$[0,1]$的连续函数g，使得

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\in A\text{时}\\ 0, & \text{当}x\in V-V^\circ\text{时}\end{cases}$$

令

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & \text{当}x\in V\text{时}\\ 0, & \text{当}x\in X-V\text{时}\end{cases}$$

则f就是要求的函数。事实上，因为V是闭集，于是V°与$X-V$便是相隔离的、所以由f在V上连续以及在$X-V^\circ$上连续就推出f在X上连续。

〔证完〕

推论 局部紧的正则空间是完全正则的。

值得注意的是，局部紧空间的连续象并不一定是局部紧的，例如（X，$\mathscr{T}_1$）是散空间时，对任何一个拓扑$\mathscr{T}_2$，恒同映射$f(x)=x$总是（X，$\mathscr{T}_1$）到（X，$\mathscr{T}_2$）上的连续映射，此时当然可以取$\mathscr{T}_2$使得(X，$\mathscr{T}_2$)不是局部紧的。但如果加强条件要求f不但连续而且是开映射时，那么由X的局部紧性质就，可以决定f〔X〕也是局部紧的，这是因为f把点$x\in X$的紧邻域映成了$f(x)$的紧邻域。

定理4.22 设积空间$Y=\times\{X_\alpha;\ \alpha\in A\}$是局部紧的，则每一个坐标空间$X_\alpha$都是局部紧的，并且除去有限多个以外，其它坐标空间都是紧的。

证明 由于投影P_α是Y到X_α上的连续的开映射，这就由Y的局部紧性决定了X_α的局部紧性。此外Y中紧邻域的存在说明非紧的坐标空间至多有限个。

〔证完〕

§7 一点紧化

对非紧的拓扑空间X作研究时，常常去构造一个紧空间X^*，使X是X^*的子空间并且又是X^*的稠密子集(或者使X与X^*的某个稠密子空间同胚）。通常把X^*叫X的紧化。

例如，对于实数空间R添上两个点，$-\infty$与$+\infty$，便得到

$R^* = R \cup \{-\infty, +\infty\}$，规定$R^*$的子集$R$中的元素依然保持原有顺序，$+\infty$是$R^*$的最大元而$-\infty$是$R^*$的最小元，这样定义的$R^*$（关于序拓扑）就是一个紧空间，叫广义实数空间。这是对实数空间的一种紧化。

又例如，给复数平面$\tilde{E}_2$添上无限远点∞便得到复变函数论中的广义复数平面，这是大家熟悉的。

紧化的形式很多，本节只介绍最简单的一种，叫一点紧化。因为是Alexandroff提出来的，因此也叫Alexandroff一点紧化。

定义 5 设（X，$\mathscr{T}$）是非紧的拓扑空间，令

$$X^* = X \cup \{\infty\}$$

$$\mathscr{T}^* = \mathscr{T} \cup \{U : U \subset X^* \text{并且} X^* - U \text{是} X \text{中的闭的紧子集}\}$$

我们把（X^*，$\mathscr{T}^*$）叫作空间X的一点紧化。

要知道这个定义是合理的，自然应该解决下述三个问题：

（1）验证$\mathscr{T}^*$确实是X^*上的一个拓扑；

（2）$\mathscr{T}$是$\mathscr{T}^*$在X上的相对拓扑，并且X在X^*中稠密；

（3）（X^*，$\mathscr{T}^*$）是紧的。

首先，我们注意到$\mathscr{T}^*$是由两种类型的集合构成的。第一种是X的开集；第二种是这样的$U \subset X^*$，它含有点∞同时使得$X - U$是X的紧的闭集。显然$\varnothing$与X^*都是$\mathscr{T}^*$的元素。为了证明$\mathscr{T}^*$中二元素之交仍属于$\mathscr{T}^*$，只需要验证两个第二种元素U_1与U_2的交$U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}^*$，其它是明显的。事实上，此时$\infty \in U_1 \cap U_2$，并且由等式

$$X^* - (U_1 \cap U_2) = (X^* - U_1) \cup (X^* - U_2)$$

推出$X^* - (U_1 \cap U_2)$是X的紧的闭集，从而$U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}^*$。再验证$\mathscr{T}^*$满足拓扑的第三个条件。设$U_i \in \mathscr{T}^*$，$i \in I$，要证明

$\subset\{U_i: i\in I\}\in\mathscr{T}^*$。事实上，当每一个$U_i$都不含$\infty$时，显然$\bigcup\{U_i: i\in I\}$就是$X$的开集。当$\infty$属于某个$U_{i_0}$时，因为

$$\infty\in\bigcup\{U_i: i\in I\}$$

并且

$$X^*-\bigcup\{U_i: i\in I\}=\bigcap\{X-U_i: i\in I\}$$
$$\subset X^*-U_{i_0}$$

由此推出$X^*-\bigcup\{U_i: i\in I\}$是$X$的闭集，注意到$X^*-U_{i_0}$是紧的，所以$X^*-\bigcup\{U_i: i\in I\}$是$X$的紧的闭集。从而$\bigcup\{U_i: i\in I\}\in\mathscr{T}^*$。至此证明了$(X^*, \mathscr{T}^*)$确实是拓扑空间。

因为X是非紧的，所以单点集$\{\infty\}$不是开集，从而X在*中稠密。至于$\mathscr{T}$是$\mathscr{T}^*$在X上的相对拓扑则是明显的。

最后，设$\mathscr{U}$是X^*的任意一个开复盖，于是∞必属于某个$X_0\in\mathscr{U}$，因为X^*-U_0是紧的，它应被$\mathscr{U}$的某个有限子族$\mathscr{V}$盖住，从而$\mathscr{V}\cup\{U_0\}$就是$\mathscr{U}$的一个有限子复盖。$(X^*, \mathscr{T}^*)$ U的紧性得证。

定理4.23 非紧的拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的一点紧化$(X$ $\mathscr{T}^*)$是T_2型空间的充要条件是$(X, \mathscr{T})$是局部紧的T_2型空间。

证明 必要性。X^*是紧的T_2空间，当然是局部紧的T_2空间，而X是X^*的开子集，根据定理4.20推论1，X是局部紧的。X的T_2性是显然的。

充分性。若x、$y\in X$，$x\neq y$，因X是T_2空间，所以存在U、$V\in\mathscr{T}\subset\mathscr{T}^*$，使得

$$x\in U,\ y\in V,\ U\cap V=\varnothing$$

若$y=\infty$，$x\in X$，因X是局部紧的T_2空间，根据定理4.20，x在

X中有一个紧的闭邻域V，令$U=X^*-V$，此时V与U就分别是x与y在X^*中的不相交的邻域。无论哪种情况，X^*中任何不的二点总是T_2分离的。

〔证完〕

第四章 习 题

1．回顾前几章中列举的各拓扑空间的例子，哪些是紧的？哪些是可数紧的？哪些是序列式紧的？

2．试证：定义在紧空间X上的实值连续函数f是有界的并在X上取到它的最大值和最小值。

3．证明T_2空间中两个紧子集的交仍是紧的。并对非T_2空间的情形，试举一反例。

4．证明正则空间中紧子集的闭包是紧的。

5．U是拓扑空间X中的开集，$\mathscr{C}$是一族闭的紧子集，证明：当$\cap\{C: C\in\mathscr{C}\}\subset U$时，一定存在有限族$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}\subset\mathscr{C}$满足条件$\cap\{C_i: i=1, 2, \cdots, n\}\subset U$。

6．设$\mathscr{C}$是T_2空间X中的一族紧子集，证明：当$\mathscr{C}$中任意有限多个元的交都是连通集时，$\cap\{C: C\in\mathscr{C}\}$一定也是连通的。

※7．（闭图象定理）设f是由拓扑空间X到紧的、T_2空间Y的映射，试求：f连续当且仅当$\{(x, f(x)): x\in X\}$是积空间$X\times Y$中的闭集。

8．证明可数紧空间五连续象是可数紧五。

9．证明序列式紧空间的连继象是序列式紧的。

第五章　度量空间、度量化

§1　度 量 空 间

在第二章§1的最后部分，我们曾引入了度量空间的概念。

设X是一个集合，如果ρ：$X\times X\to R$满足条件：

(1) $\rho(x,\ y)=0\longleftrightarrow x=y$；

(2) $\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$；

(3) $\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$；（三角形不等式）

则称二元函数ρ是集合X上的一个度量，$(X,\ \rho)$叫做度量空间。在不引起混淆时，简记为度量空间X。但当X上同时出现几个度量时，就应指明各自的度量。

条件(1)中的"$\longleftrightarrow$"换作"$\longleftarrow$"，我们就得到伪度量空间的概念。

当集合X上给定一个伪度量ρ之后，我们把形如：$S(x;\ a)=\{y:\ \rho(x,\ y)<a\}$ $(a>0)$的集合叫做伪度量空间$(X,\ \rho)$中的以x为中心a,为半径的开球，同时把集合$\{y:\rho(x,y)\leqslant a\}$叫做闭球。不难验证所有开球之族$\mathscr{B}=\{S(x;\ a):\ x\in X,\ a>0\}$可以作为集$X$上某个拓扑$\mathscr{T}$的基底。今后凡是说到伪度量空间$(X,\ \rho)$的拓扑，总是指按这种自然方式由伪度量$\rho$决定的拓扑$\mathscr{T}$。容易看到，这种拓扑是满足第一可数公理的，这是因为开球族$\{S(x;\frac{1}{n}):\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$构成了点$x$的一个邻

域基。同时我们可以证明，如果由伪度量ρ决定的拓扑$\mathscr{T}$使$(X, \mathscr{T})$是T_0空间，那么ρ必是度量，事实上，因为当x、$y\in X$，且$x\neq y$时，x和y二点之一必有一邻域不含另一点，不妨认为有开邻域U不含y，于是就有正实数a使得$y\overline{\in} S(x;\ a)$，所以$\rho(x,\ y)\geqslant a>0$。

设$(X,\ \rho)$是伪度量空间，$x\in X$，$A\subset X$，我们把$\rho(x, A)=\inf\{\rho(x,a):\ a\in A\}$叫做$x$到集合$A$的距离。对于给定的$A\subset X$，$\rho(x,\ A)$是$X$上的非负实值函数，而且是连续函数，这是因为$\rho(x,\ z)\leqslant\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z)$，对所有的$z\in A$取$\rho(x, z)$，$\rho(y,\ z)$的下确界，有$\rho(x,\ A)\leqslant\rho(x,\ y)+\rho(y,A)$，即$\rho(x,\ A)-\rho(y,\ A)\leqslant\rho(x,\ y)$，交换$x$，$y$的顺序有同样的不等式成立，所以，$|\rho(x,A)-\rho(y,\ A)|\leqslant\rho(x,\ y)$成立，说明对任意的$r>0$，只要$y\in S(x;\ r)$，就有$|\rho(x,\ A)-\rho(y,\ A)|<r$成立。即$\rho(x,\ A)$是连续的。

定理5.1 设$(X,\ \rho)$是伪度量空间，$A\subset X$，则$x\in\overline{A}$的充要条件是$\rho(x,\ A)=0$。

证明 必要性，若$\rho(x,A)=r>0$，那么开球$S(x;\ r)$就不含有A的点，所以$x\overline{\in}\overline{A}$；充分性，若$\rho(x,\ A)=0$，于是$x$的每个开球$S(x;\ r)$都有$A$的点，所以$x\in\overline{A}$。

〔证完〕

定理5.2 伪度量空间是正规的；度量空间是T_4型的。

证明 设A、B是伪度量空间$(X,\ \rho)$中不相交的两个闭集，令$U=\{x:\ \rho(x,\ A)-\rho(x,\ B)<0\}$，$V=\{x:\ \rho(x,\ A)-\rho(x,B)>0\}$。因为$\rho(x,\ A)-\rho(x,B)$是$x$的连续函数，所以$U$、$V$是开集，而$A\subset U$，$B\subset V$，$U\cap V=\varnothing$，故$(X,\ \rho)$是

正规的。

对度量空间来说，当$x \neq y$时，$\rho(x, y) = r > 0$，于是$S(x, \frac{r}{2})$与$S(y, \frac{r}{2})$就是x与y的不相交的邻域，所以X是T_2型的，T_2 + 正规 = T_4，故度量空间是T_4型的。

〔证完〕

定理5.3 设(X, ρ)是伪度量空间，$\{S_n, n \in D\}$是X中的网，$x \in X$，则$\lim_{n \in D} S_n = x$当且仅当$\lim_{n \in D} \rho(S_n, x) = 0$。

证明 因为，$\lim_{n \in D} S_n = x$当且仅当对每一个正数r，网S_n终于在$S(x; r)$中，而$S_n \in (x; r)$就相当于$\rho(S_n, x) < r$，故$\lim S_n = x$当且仅当实数空间中的网$\{\rho(S_n, x), n \in D\}$终于在每一个$[0, r)$之中，即$\lim_{n \in D} \rho(S_n, x) = 0$。

〔证完〕

关于度量空间的例子，除去第二章§1中已列举的之外，现再列举几例：

例1 在XOY平面上，考虑由一点P_1出发到达另一点P所走的实际路程，行走的规则由下列条件决定。

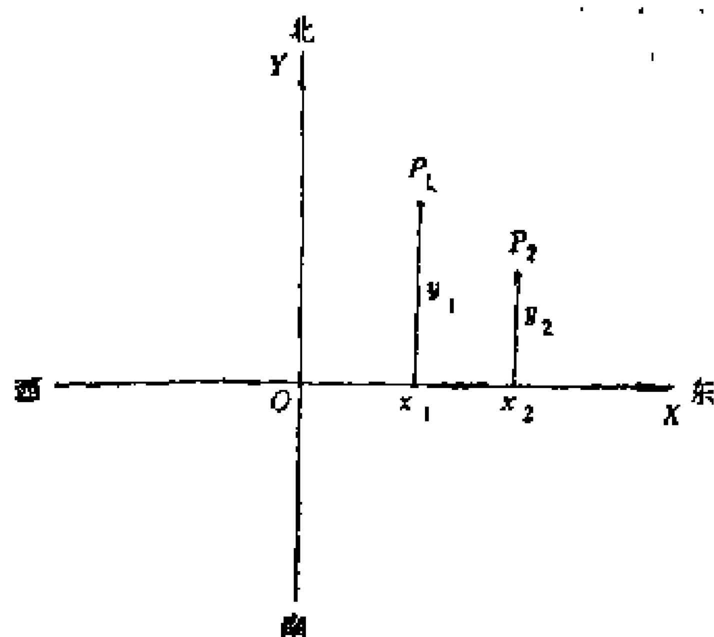
（1）沿OX轴可以东西行走；（见下图）

（2）除OX轴外，只能沿南北方向行走。

那么任意两点$P_1(x_1, y_1)$与$P_2(x_2, y_2)$间的距离以“行程”计算的话，将由下式给出

$$\rho(P_1, P_2) = \begin{cases} |y_2 - y_1|, & x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

为了证明ρ确实是一个度量，只须验证一下三角形不等式



就行了。因为其它两个条件显见的成立。

今设$P_i=(x_i, y_i)$，$i=1, 2, 3$，是三个点。那么

（1）若$x_1=x_2$，则$\rho(P_1, P_2)=|y_1-y_2|$，此时不论x_3取什么值恒有

$$\rho(P_1,P_3)+\rho(P_3,P_2)\geqslant|y_1-y_3|+|y_3-y_2|\geqslant|y_1-y_2|=\rho(P_1, P_2)。$$

（2）若$x_1\neq x_2$，则$\rho(P_1, P_2)=|y_1|+|y_2|+|x_1-x_2|$

于是，当$x_3\neq x_1$，且$x_3\neq x_2$时

$$\rho(P_1, P_3)+\rho(P_3, P_2)=|y_1|+|y_3|+|y_3|+|y_2|+|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\geqslant|y_1|+|y_2|+|x_1-x_2|=\rho(P_1, P_2)$$

当x_3与x_1、x_2中有一个相等，比如$x_3=x_1$，于是$x_3\neq x_2$，此时

$$\rho(P_1, P_3)+\rho(P_3, P_2)=|y_1-y_3|+|y_3|+|y_2|+|x_3-x_2|\geqslant|y_1|+|y_2|+|x_3-x_2|$$
$$=|y_1|+|y_2|+|x_1-x_2|=\rho(P_1, P_2)$$

综合上述，可知三角形不等式成立。

上述的度量ρ与通常欧氏平面的度量是不同的。现实世界

中区别于欧氏度量的例子很多。又如，光在不同介质中的传播将不走直线，因此为了研究光的干涉现象，在物理学中就必须引入“光程”等等，这里不多作介绍。

上述度量ρ不仅本身与通常的欧氏度量不同，而且它们各自决定的拓扑也是不同的。为了看到这一点，我们只须考查平面上的这样一些点$P_n=(\frac{1}{n},\ 1)$，$n=1,2,\cdots\cdots$，以及$P_0=(0,\ 1)$，显见$\rho(P_n,\ P_0)>2$，所以在ρ决定的拓扑$\mathscr{T}$意义上，点列$\{P_n,\ n=1,2,\cdots\cdots\}$不向$P_0$收敛，但是就通常拓扑（$E^2$）来说$\lim P_n=P_0$。

例 2　设S是任意集合，对于每一个$s\in S$，令$I_s=I=[0,1]$叫做I的一个“拷贝”，将所有I_s的点0贴合成一个点，仍记作0，于是得到集合X。为了明确起见，对I_s中的点x，以记号$x(s)$表示它来自拷贝I_s。我们于$X=\bigcup\{I_s:\ s\in S\}$上定义度量如下：

$$\rho(x_1(s),\ x_2(s'))=\begin{cases}|x_1-x_2|, & s=s'\\ x_1+x_2, & s\neq s'\end{cases}$$

建议读者自己去验证上述ρ确实是X上的一个度量，此度量下的X叫做星形空间（也叫刺猬空间）。

例 3　（*Baire*空间）设$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots)$为任意实数列或以任意集合$A_n$的元素为项的序列($x_n\in A_n$)（其中$\{A_n\}$是给定的集列)。全体这样的序列形成集合$X$。设$y\in X$，$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots)$，当$x\neq y$时，记$m(x,y)=\min\{n:\ x_n\neq y_n\}$。我们定义

$$\rho(x, y)=\begin{cases}0, & x=y\\ \dfrac{1}{m(x,y)}, & x\neq y\end{cases}$$

则(X, ρ)是度量空间。

为了验证ρ是度量，只须验证三角形不等式$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$就行了，因为其它两个条件是明显的。

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\cdots)$，$y=(y_1, y_2, \cdots,y_n,\cdots\cdots)$ $z(z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\cdots)$是$X$中的任意三点，不妨设$m(x, y)=n_0>0$（若$x=y$，则三角形不等式显然成立），于是，$x_{n_0}\neq y_{n_0}$，$y_{n_0}\neq z_{n_0}$二式至少有一个成立，推出，

$$m(x, y)\geqslant min\{m(x, z), m(y, z)\}$$

故　$\rho(x, y)\leqslant max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$

它显然比三角形不等式要强得多。

Baire 空间在理论研究中是一个非常重要的度量空间。

同一个集合X上的不同度量（伪度量），有可能决定不同的拓扑，这种例子我们已有介绍。使我们有兴趣的是：不同的度量也可能决定相同的拓扑。

定理5.4　设ρ是集合X上的一个伪度量，那么

$$\tilde{\rho}(x, y)=min\{1, \rho(x, y)\}$$

也是X上的伪度量并且ρ与$\tilde{\rho}$决定了同一个拓扑。

证明　首先，只须验证三角形不等式，设x,y,z为X的任意三点，当$\tilde{\rho}(x,y)=\rho(x,y)$及$\tilde{\rho}(y,z)=\rho(y,z)$同时成立时，为因$\tilde{\rho}(x, z)\leqslant\rho(x, z)$故有$\tilde{\rho}(x, z)\leqslant\tilde{\rho}(x,y)+\tilde{\rho}(y,z)$。当$\tilde{\rho}(x, y)\neq\rho(x, y)$或$\tilde{\rho}(y, z)\neq\rho(y, z)$时，则由$\tilde{\rho}$的定义可知$\tilde{\rho}(x, y)+\tilde{\rho}(y, z)\geqslant1$，而$\tilde{\rho}(x, z)\leqslant1$，故有$\tilde{\rho}(x,z)\leqslant$

$\tilde{\rho}(x, y)+\tilde{\rho}(y, z)$。

其次，每一个半径$a>1$的开球$S(x; a)$都能表示为一些半径<1的开球之并，故$\tilde{\rho}$与ρ决定的拓扑是相同的。

〔证完〕

由此可见，当X=实数集R，而且定义x_1，x_2二点间的距离$\rho(x_1, x_2)$为

$$\rho(x_1, x_2)=\min\{|x_1-x_2|, 1\}$$

时，则由ρ亦导出实数直线的通常拓扑。

这就说明同一拓扑空间当其可度量化时，往往可由几个不同的度量诱导出来。

所谓拓扑空间$(X, \mathscr{T})$是可度量化的(*metrizable*)，是指其拓扑结构$\mathscr{T}$能由X上的某一度量决定。

§2 完备度量空间

为了方便，今后只讨论度量空间，但是多数结果对伪度量空间也是成立的。

定义1 设(X, ρ)是度量空间，$\{x_n\}$是其中的点列。点列$\{x_n\}$称做*Cauchy*序列，是指对于任意给定的$\epsilon>0$，存在n_0，使$m, n\geqslant n_0$时，有

$$\rho(x_m, n_n)<\epsilon。$$

定义2 若(X, ρ)是度量空间，而且每个*Cauchy*序列$\{x_n\}$都是收敛序列，我们便称(X, ρ)是完备度量空间(*Comp eltemetric space*)。

如果注意到实数完备性在数学分析中的作用（它是极限理论的基本前提），那么完备性的重要意义也就非常清楚了。例

如泛函分析中的压缩映象原理就是以完备度量空间为前提的，下面列举几个完备度量空间的例子。

例 4 n维欧氏空间E^n是完备。

例 5 $Hilbert$空间E^∞是完备的。

设P_1，P_2，…，P_n，……是E^∞中的一个$Cauchy$序列，其中$P_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}, \cdots\cdots)$。于是对于任意的$\epsilon>0$，存在$n_0$，使$m$，$n\geqslant n_0$时，有

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(m)}-x_k^{(n)})^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\epsilon \quad (*)$$

成立，从而

$$|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}|<\epsilon$$

亦成立，这说明对每个k而言，$\{x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots x_k^{(n)}, \cdots\cdots\}$是一个实数的$Cauchy$序列，根据实数的完备性，序列$\{x_k^{(n)}\}$存在极限，设$x_k^*$为$\{x_k^{(n)}\}$的极限。令$P^*=\{x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots, x_k^*, \cdots\cdots\}$，我们现在证明$\{P_n\}$收敛于$P^*$。

实际上由式（*）可以推出对于任意自然数k下式成立

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}(x_i^{(m)}-x_i^{(n)})^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\epsilon$$

当$m\longrightarrow\infty$时，得到

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}(x_i^*-x_i^{(n)})^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\epsilon$$

再令$k\longrightarrow\infty$，于是有

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^*-x_i^{(n)})^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\epsilon$$

这就证明了$P_n\to P^*$。

〔证完〕

例 6 *Baire*空间是完备的。

设P_1，P_2，…，P_n，……是 *Baire* 空间中的*Cauchy*序列，其中$P_n=(x_1^{(n)}, \cdots\cdots, x_k^{(n)}, \cdots\cdots)$。于是任意给定$\epsilon>0$，（无妨考虑$\epsilon=\frac{1}{K}$）存在$n_0$，当$n$，$n'\geqslant n_0$时，有

$$\frac{1}{m(P_n, P_{n'})}<\epsilon$$

换个说法就是：对任意自然数K，存在n_0，使当$n,n'\geqslant n_0$，时，

$$x_k^{(n)}=x_k^{(n')}$$

对一切$k\leqslant K$成立。

因此对每个自然数k而言，实数序列$x_k^{(1)}$，$x_k^{(2)}$，…，$x_k^{(n)}$，……除了有限项而外是常数序列，设它的极限是x_k^*，于是显然地有 $P_n\to P^*$，其中$P^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*, \cdots\cdots)$。

例 7 例 1 中的度量空间是完备空间。

实际上，若P_1，P_2，…，P_n，……是*Cauchy*序列，其中$P_n=(x_n, y_n)$，则下列两种情况之一必成立。

i)y_1，y_2，…，y_n，……是实数的*Cauchy*序列，而且从某项n_0开始恒有$x_{n_0}=x_{n_0+1}=\cdots\cdots$。

ii)x_1，x_2，……，x_n，……是实数的*Cauchy*序列，而且$y_n\to 0$。

由此可以确定出$\{P_n\}$的收敛点，从而证明了空间的完备性。详细证明建议读者补出。

下边的定理说明任意度量空间X都可以作为某一完备度量空间的稠密子空间。证明思想则来源于把有理数完备化而得到实数的过程。

定理5.5 设(X, ρ)是一度量空间，则存在完备度量空间(X^*, ρ^*)，使得X与X^*的某一稠密子空间$\widetilde{X}$是等距同构的。并且空间X^*在等距同构意义下是唯一的。

所谓两个度量空间(X_1, ρ_1)与(X_2, ρ_2)等距同构，是指存在着1—1对应h：$X_1 \to X_2$上，使得$\rho_1(x, x') = \rho_2(h(x), h(x'))$。显然，等距同构是度量空间类的一个等价关系。

定理的证明可以分成以下几步进行：

（一）首先，定义集合X^*；

（二）在X^*上定义二元函数ρ^*，并说明这种定义是合理的；

（三）说明ρ^*是X^*上的度量；

（四）在X^*中确定出一个与X等距同构的稠密子空间；

（五）再说明(X^*, ρ^*)是完备度量空间；

（六）最后，证明(X^*, ρ^*)在等距同构的意义下是唯一的。

下面详细地叙述一下证明的内容。

（一）定义X^*。

首先，令Y表示X中一切Cauchy序列组成的集合，那么，当$x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots\cdots)$及$y = (y_1, y_2 \cdots, y_n, \cdots\cdots)$为$Y$中任意二元素时，实数序列$\rho(x_1, y_1)$，$\rho(x_2, y_2)$，…，$\rho(x_n, y_n)$，……是一个收敛序列，我们将它的极限记作$\rho(x, y)$。

为了说明它是收敛序列，只须说明这个实数序列是一个Cauchy序列就可以了。实际上，由三角形不等式即得

$$\rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m)$$

将式中的m，n对调一下，又有

$$\rho(x_n, y_n)\leqslant\rho(x_n, x_m)+\rho(x_m, y_m)+\rho(y_m, y_n)$$

由这两个不等式就得到

$$|\rho(x_m, y_m)-\rho(x_n, y_n)|\leqslant\rho(x_m, x_n)+\rho(y_m, y_n)$$

因为$x_1, \cdots, x_n, \cdots$，和$y_1, \cdots, y_n, \cdots$，都是Caucy序列，那么从上述不等式就能看出$\rho(x_1, y_1), \cdots\cdots\rho(x_n, y_n), \cdots\cdots$是Cauchy序列。

特别当Y中两个元素x与y满足$\rho(x,y)=0$时，我们就说x与y是等价的，记作$x\sim y$。显然$\sim$是Y上的等价关系。我们把与x等价的元素组成的等价类记作$\widetilde{x}$，而所有等价类组成的集合记作X^*。

我们不难证明（Y，ρ）是伪度量空间，实际上，前两条是显然的，只须验证三角形不等式，设x，y，$z\in Y$，而$x=(x_1,\cdots, x_n,\cdots\cdots)$，$y=(y_1,\cdots,y_n\cdots\cdots)$，$z=(z_1,\cdots,z_n,\cdots\cdots)$

因为

$$\rho(x_n, z_n)\leqslant\rho(x_n, y_n)+\rho(y_n, z_n)$$

将上式两端取极限，即得

$$\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$$

（二）定义X^*上的二元函数ρ^*

我们按下式定义X^*上的二元函数ρ^*：

$$\rho^*(\widetilde{x}, \widetilde{y})=\rho(x, y)$$

其中x，y是$\widetilde{x}$、$\widetilde{y}$的代表元素。为了说明定义是合理的，只须说明定义不依赖于$\widetilde{x}$、$\widetilde{y}$中代表元素x、y的取法，即对$x^{(1)}$，$x^{(2)}\in\widetilde{x}$，$y^{(1)}$，$y^{(2)}\in\widetilde{y}$，恒有

$$\rho(x^{(1)}, y^{(1)})=\rho(x^{(2)}, y^{(2)})$$

实际上，根据(Y，ρ)上的三角形不等式

$\rho(x^{(1)}, y^{(1)}) \leqslant \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) + \rho(x^{(2)}, y^{(2)}) + \rho(y^{(2)}, y^{(1)})$

因为$\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0 = \rho(y^{(1)}, y^{(2)})$

故 $\rho(x^{(1)}, y^{(1)}) \leqslant \rho(x^{(2)}, y^{(2)})$

同理$\rho(x^{(2)}, y^{(2)}) \leqslant \rho(x^{(1)}, y^{(1)})$

从而$\rho(x^{(1)}, y^{(1)}) = \rho(x^{(2)}, y^{(2)})$

（三）ρ^*是X^*上的度量

下列两条性质：

（1）$\rho^*(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \longleftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$

（2）$\rho^*(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho^*(\tilde{y}, \tilde{x}) \geqslant 0$

都是显然的，这里只给出三角形不等式的证明。

设 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in X^*$，又$x, y, z$分别是$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$的代表元素，由于$(Y, \rho)$是伪度量空间，故

$\rho^*(x, z) \leqslant \rho^*(x, y) + \rho(y, z)$

从而 $\rho^*(\tilde{x}, \tilde{z}) \leqslant \rho^*(\tilde{x}, \tilde{y}) + \rho^*(\tilde{y}, \tilde{z})$

（四）X与X^*的稠密子空间$\tilde{X}$等距同构

对于$x \in X$，常列$(x, x, \cdots\cdots, x, \cdots\cdots)$显然属于$Y$，相应的等价类记作$\tilde{x}$，于是$\tilde{x} \in X^*$。定义映射$h$：$h(x) = \tilde{x}$，不难看出$h$是$X$与$\tilde{X} = \{\tilde{x}: x \in X\}$之间的1—1对应，而且$h$还是$X$到$\tilde{X}$上的保距映射，说明$X$与$\tilde{X}$等距同构。

另外，设$\tilde{x} \in X^*$，$x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$为$\tilde{x}$的代表，由于$x$是Cauchy序列，故对每一个$\epsilon > 0$，存在$N$，使当$n \geqslant N$时，$\rho(x_N, x_n) < \epsilon$，于是由$x_N$决定的$X^*$的点$\tilde{x}_N = h(x_N)$满足$\rho(\tilde{x}_N, \tilde{x})$

$<\epsilon$。说明 $\widetilde{X}$在X^*中稠密。

（五） (X^*, ρ^*) 是完备空间。

设$\widetilde{x}^{(1)}, \widetilde{x}^{(2)}, \cdots, \widetilde{x}^{(n)}, \cdots\cdots$是$X^*$中的 Cauchy序列，$x^{(n)}$是$\widetilde{x}^{(n)}$的代表，而$x^{(n)} = (x_1^{(n)}\cdots, x_m^{(n)}, \cdots)$ 。因为$\widetilde{X}$在X^*中稠密，故对$\widetilde{x}^{(n)} \in X^*$，可取$y_n \in X$，使得 $\rho^*(\widetilde{x}^{(n)}, \widetilde{y}_n) < \frac{1}{n}$。容易证明$\widetilde{y}_1, \cdots, \widetilde{y}_n\cdots\cdots$也是$X^*$中的Cauchy序列，又由于 $y_n \in X$，而 $\rho^*(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}_m) = \rho(y_n, y_m)$，故$\{y_n\}$是$X$中的Cauchy序列，从而$y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots) \in Y$。我们还可以看到$\widetilde{x}^{(n)} \to \widetilde{y}$，这是因为对于$\epsilon > 0$，存在$N$，使$n, k \geqslant N$时，$\rho(y_n, y_k) < \epsilon$，当$k \to \infty$时，有$\rho^*(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}) \leqslant \epsilon, = p(y_n, y)$ 又因为 $\rho^*(\widetilde{y}_n, \widetilde{x}^{(n)}) < \frac{1}{n}$，所以，$\rho^*(\widetilde{x}^{(n)}, \widetilde{y}) \leqslant \epsilon + \frac{1}{n}$，若取$n$充分大，则有$\rho^*(\widetilde{x}^{(n)}, \widetilde{y}) < 2\epsilon$。说明$X^*$中的Cauchy序列$\widetilde{x}^{(1)}, \widetilde{x}^{(2)}\cdots, \widetilde{x}^{(n)}\cdots\cdots$收敛于点$\widetilde{y}$，故$(X^*, \rho^*)$是完备的。

（六）(X^*, ρ^*)是满足条件的唯一完备度量空间。

这也就是要证明，设(Y^*, d^*)是一完备度量空间，而且其中有一个与X等距同构的稠密子空间$\widetilde{Y}$，那么X^*便与Y^*是等距同构的。

实际上。因$\widetilde{X}$与$\widetilde{Y}$都与X等距同构，故在$\widetilde{X}$与$\widetilde{Y}$之间就存在一个1—1的等距映射f：$\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$，对于$X^* - \widetilde{X}$中任意一点$P$，由于$\widetilde{X}$是$X^*$的稠密子空间，故可在$\widetilde{X}$中选一个收敛于$P$的序列$P_1, \cdots, p_n, \cdots\cdots$。令$Q_n = f(P_n)$，那么$\{Q_n\}$便是$\widetilde{Y}$中的 Cauchy

序列，由于$\widetilde{Y}^*$是完备的，故$\{Q_n\}$收敛于$\widetilde{Y}^*$中一点Q，定义$f(P)=Q$，这样f便是X^*到Y^*的映射。我们再指出f是映X^*到Y^*之上的。这是由于Y^*中任意一点Q，都存在$\widetilde{Y}$中序列$\{Q_n\}$使$Q_n\to Q$，令$P_n=f^{-1}(Q_n)$，则$\{P_n\}$便是$\widetilde{X}$中的Cauchy序列，设$P_n\to P$于是便有$f(P)=Q$，故f是映X^*到Y^*上的映射。另外f还是X^*与Y^*之间的保距映射，实际上，设$P_n\to P$，$P_n'\to P'$，那么由不等式

$$|\rho^*(P,\ P')-\rho^*(P_n,P_n')|\leqslant\rho^*(P,P_n)+\rho^*(P',P_n')$$

不难看出

$$\rho^*(P,\ P')=\lim_{n\to\infty}\rho^*(P_n,\ P_n')=\lim_{n\to\infty}d^*(f(P_n),\ f(P_n))$$

$$=d^*(Q,\ Q')=d^*(f(P),\ f(P'))$$

从而f是X^*与Y^*间的 1—1 保距映射，即 X^* 与Y^*等距同构。

〔证完〕

下边给出几个判断度量空间的完备性的定理。

定理5.6（Cantor） 一个度量空间是完备的当且仅当对于X中任意一个下降的非空闭集列$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots\cdots$，若 $\delta(F_n)\to 0$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\phi$$

其中$\delta(F_n)=sup\{\rho(x,\ y):\ x,\ y\in F_n\}$叫做$F_n$的直径。

证明 先证明必要性。

设X是完备度量空间，又设下降的非空闭集列$F_1\supset F_2\supset$

$\cdots\supset F_n\supset\cdots\cdots$满足 $\delta(F_n)\to 0$。在每个 F_n中取一点 x_n，那么 $\{x_n\}$便是 X中的一个 Cauchy序列设它收敛于x_0，因为$m>n$时$x_m\in F_m\subset F_n$，且F_n又是闭集，故$x_0\in F_n$，这样就证明了

$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\phi$。

其次证明充分性。

用反证法。设$\{x_n\}$是 X中不向任何点收敛的 Cauchy 序列，于是$\{x_n\}$在X中无聚点，令 $F_n=\{x_k; k\geqslant n\}$，$F_n$便是闭集，且满足$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots\cdots$，$\delta(F_n)\to 0$（由于$\{x_n\}$是Cauchy序列），但$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\phi$

〔证完〕

推论 设(X,ρ)是任意一个度量空间，$M\subset X$，而且$(M,\rho$是完备的，那么M必是X中的闭集。

定理5.7 度量空间$(X,\ \rho)$是完备的，当且仅当对于任意的闭集族$\mathscr{A}$，如果$\mathscr{A}$中任意有限个元的交非空，而且对每一个$\epsilon>\phi$，存在$A\in\mathscr{A}$，使得$\delta(A)<\epsilon$，则$\bigcap\{A; A\in\mathscr{A}\}\neq\phi$。

证明 充分性由前定理立即推出，我们证明必要性。

首先，对每一个 n，取$A_n\in\mathscr{A}$，使$\delta(A_n)<\frac{1}{n}$，令$F_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$，由上面定理5.6知道$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\phi$，并且$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$只能是单点集，设为$\{x_0\}$，那么对每一个$A\in\mathscr{A}$，都有$x_0\in A$（因为否则的话，若$x_0\overline{\in}A$，由$A$是闭集，知$\rho(x_0,\ A)>0$，取充分大的$n$，则有$d(x_0,\ A)>\frac{1}{n}$，而$x_0\in A_n$，$\delta(A_n)<\frac{1}{n}$故$A\cap A_n=\phi$，这与条件矛盾）。说明$\mathscr{A}$的交非空。

〔证完〕

定理5.8 完备度量空间(X, ρ)的子空间(Y, ρ)完备的充要条件是Y是X中的闭集。

请读者自己证明。

定义3 度量空间是自密的（self－dense）是指它没有孤立点（x叫孤立点，乃指$\{x\}$是开集），也即$X \subset X'$。

对于完备自密度量空间(X, ρ)来说，下面定理是重要的。

定理5.9 若(X, ρ)是完备自密度量空间，则$\overline{\overline{X}} \geqslant c$（连续势）。

证明 在X中任取二点，必存在分别包含这两点的、互不相交的闭邻域F_1和F_2。不妨设$F_i = \overline{U_i}$ $(i=1, 2)$，其中U_i是开集，且$\delta(F_i) < 1$。

由于X是自密的完备度量空间，故在每个开集U_i中，可以再取出两个非空的开集U_{i1}，U_{i2}，使之合于条件：

$\overline{U}_{i1} \cap \overline{U}_{i2} = \phi$。

令$F_{ij} = \overline{U}_{ij}$ $\qquad (i, j = 1, 2)$

且 $\delta(F_{ij}) < \frac{1}{2^2}$ $\qquad (i, j = 1, 2)$

一般来说，设对自然数$k \leqslant n$都已作出了非空开集

$U_{i_1, i_2 \cdots i_k}$, $i_k = 1, 2$, $(k \leqslant n)$

合于下列条件

i）当$k < n$时

$U_{i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1}} \subset U_{i_1 i_2 \cdots i_k}$

ii）令$F_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \overline{U}_{i_1 i_2 \cdots i_k}$

$\delta(F_{i_1 i_2 \cdots i_k}) < \frac{1}{2^k}$

iii）当$k<n$时

$$F_{i_1i_2\cdots i_{k_1}}\cap F_{i_1i_{k_2}\cdots i_{k_2}}=\phi。$$

那么又可以开集$\cap F_{i_1i_2\cdots i_{k_2}}$中再取出两个非空的开集，如此继续下去。

根据Cantor定理，对每一个由1、2组成的无限序列$i_1,i_2,\cdots,i_n,\cdots\cdots$都确定了$X$中的一个点，即$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_{i_1\cdots i_n}$（是个单点集）。由iii）可知这个对应是（到$X$的某个子集$Y$上）的1—1对应，

因此　　$|X|\geqslant|Y|=c$。

〔证完〕

下面的定理称做完备度量空间的Baire定理，它是一个非常重要而且十分有用的定理。

定理5.10　设U_n，$n=1,2,\cdots\cdots$是完备度量空间X的开稠密子集，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n$在$X$中稠密。

证明　只须证明X的每个非空开集G中含有集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n$的点就行了，因为$U_1$是$X$的稠密的开集，因此$G$中便有一个非空开集$V_1$，合于$n=1$时的下列条件：

i）　$\delta(V_n)\leqslant\dfrac{1}{2^n}$

ii）　$\overline{V}_n\subset U_n\cap V_{n-1}$　　（其中$V_0=G$）

又因为U_2是X的稠密的开集，因此便存在非空开集V_2，使之满足$n=2$时的条件i），ii）。这样用数学归纳法便得到了一个非空的开集序列

$V_1\supset V_2\supset V_3\supset\cdots\supset V_n\supset\cdots\cdots$

其中每个V_n都满足相应条件i），ii）。在每个V_n中任意取一

个点x_n，那么由条件i)可知

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\cdots$$

是一个Cauchy序列，因为X是完备空间，设$x_n \to x_0$，那么由ii)即知

$$x_0 \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap G$$

〔证完〕

定义4 设X是拓扑空间，F是一闭集，当着F没有内点(即$F^\circ = \phi$)时，我们便说F是无处稠密的。一般地说，设A是X的子集，所谓A无处稠密，就是指$\bar{A}$无处稠密，即$(\bar{A})^\circ = \phi$。

显然，F是拓扑空间X的闭集时，F无处稠密当且仅当$X - F$是到处稠密。

在这里F是闭集这一条件是不能去掉的，例如直线上有理点与无理点都是稠密的，但并非无处稠密。

定义5 设X是度量空间，$A \subset X$。如果A能分解成为可数多个无处稠密集之并，则称A是第一纲集，否则称A是第二纲集。

由定理5.10可知下列定理成立。

定理5.11 完备度量空间X一定是第二纲的。

证明 用反证法。设$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，其中每一$F_n$均是无处稠密的，那么无妨假设每一$F_n$都是闭集。取$U_n = X - F_n$，则$U_n$便是开的稠密子集，由定理5.10便知$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \phi$，这与下式矛盾

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$$

〔证完〕

§3 紧度量空间

我们从下列定理开始。

定理5.12 设 (X, ρ) 是一紧度量空间（即ρ诱导出紧拓扑），则对任意给定的数$\varepsilon>0$，空间X都存在着有限个点x_1，…，x_n，使得当$x\in X$时，x便与某个$x_m(m\leqslant n)$ 的距离小于ε。

证明 令$S(x;\varepsilon)$是以x为中心、ε为半径的开球，于是开覆盖$\{S(x;\varepsilon): x\in X\}$应有有限子覆盖$\{S(x_i;\varepsilon): i=1, 2, \cdots, n\}$，显然$x_1$，…，$x_n$即为所求。

〔证完〕

此定理也可以用反证法证明如下：

设对于某个$\varepsilon>0$定理结论不真，先任取一点$x_1\in X$，于是就存在$x_2\in X$，使得$\rho(x_1, x_2)\geqslant\varepsilon$。当$x_1$，$x_2$选定后又能选出$x_3\in X$，使得

$$\rho(x_i, x_j)\geqslant\varepsilon \qquad i, j\leqslant 3, \quad i\neq j$$

成立。一般说来，如果对某个自然数n已选定了x_1，…，x_n，使得当i，$j\leqslant n$，$i\neq j$时上述距离不等式成立，那么又能选x_{n+1}使得当$i,j\leqslant n+1$、$i\neq j$时仍有上述关系，这样，集$M=\{x_n: n=1, 2, \cdots\}$便是$X$中的闭集（因为其中任意二点距离大于一个定数，因此$M$在$X$中无聚点）。因为$X$是紧的，从而闭子空间M也是紧的，但是$M$是势为无限的散空间，这是矛盾。

〔证完〕

推论 紧度量空间 (X, ρ) 一定是可分的（即X中存在一个可数稠密子集）。

读者自己证明。

可分度量空间(X,ρ)一定具有可数基，这是因为$A=\{x_n: n=1,2,\cdots\}$是一个可数稠密子集时，那么开球族$\{(x_n; \frac{1}{m}): n, m$为自然数$\}$便是可数基底。实际上，当$a\in X$而且$x\in U$,$U$是开集时，将有某个$S(x; \frac{1}{m})\subset U$，由$A$的稠密性，$S(x; \frac{1}{2m})$中含有$A$中的某点$x_n$，从而

$$x\in S(x_n, \frac{1}{2m})\subset S(x, \frac{1}{m})\subset U$$

上述的讨论证明了：紧度量空间满足第二可数公理。

我们曾于第四章中介绍了可数紧的概念，不难证明可数紧空间的闭子集是可数紧的。特别对可数紧的度量空间有下面的结果。

定理5.18 设(X,ρ)是可数紧度量空间，那么对于任意给定的数$\varepsilon>0$，空间X中都存在着有限个点$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$，使得$X$中任意点$x$都与某一个$x_m$ $(m\leqslant n)$距离小于ε。

定理证明留给读者。

推论 可数紧度量空间一定满足第二可数公理。

满足第二可数公理的空间一定是*Lindelöf*空间，而可数紧的*Lindelöf*空间又必是紧的，于是有结论：

可数紧的度量空间一定是紧的。

换言之，对于度量空间而言，紧性与可数紧性以及序列式紧性是等价的。但是对非度量空间这一结论未必成立（参看第四章）。

我们于本节开始曾证明，任何一个紧度量空间都能表为有

限个直径小于（予先给定的正数）ε的集之并。反过来说不一定成立，例如实数直线上任何开区间都不是紧的，但却能表为有限个直径小于ε的集之并。以下将指出对于完备度量空间而言它的逆是成立的，让我们先引入全有界的概念。

定义 6 度量空间(X, ρ)是全有界的(*totally bounded*)，是指对任意的$\varepsilon>0$，X可以表示为有限个直径小于ε的集之并。

全有界的自然是有界的，但反之不然，例如 *Hilbert* 空间E^∞中的闭单位球S，其中点$x_1=(1, 0, \cdots, 0, \cdots\cdots)$，$x_2=(0, 1, 0, \cdots\cdots)$，……，$x_n=(0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots\cdots)$，（其中1在第$n$个位置），……对于任何$m\neq n$，恒有$\rho(x_n, x_m)=\sqrt{2}$，所以$S$不是全有界的。

下面提出的定理揭示了度量空间紧性与完备性之间的关系

定理5.14 度量空间(x, ρ)是紧的当且仅当它是全有界的而且是完备。

证明 仅须证明条件的充分性就行了。我们来说明它是序列式紧的。

设$x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots\cdots$是$X$中任一序列，因$X$是全有界的，所以存在子列

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots\cdots,\ x_n^{(1)},\ \cdots\cdots,$$

使得任意二点$x_i^{(1)}$，$x_j^{(1)}$间的距离小于1；同理$\{x_i^{(1)}\}$中又有子列

$$x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(1)},\ \cdots\cdots,$$

使得任意二点$x_i^{(2)}$，$x_n^{(2)}$间的距离小于$\frac{1}{2}$；如此继续下去便得一系列序列（位于下边的一行总是上边一行的子序列）：

$x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, ……, $x_n^{(1)}$, …… ($\rho(x_i^{(1)}, x_j^{(1)})<1$)

$x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, ……, $x_n^{(2)}$, …… ($\rho(x_i^{(2)}, x_j^{(2)})<\frac{1}{2}$)

……………………

$x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, ……, $x_n^{(n)}$, …… ($\rho(x_i^{(n)}, x_j^{(n)})<\frac{1}{n}$)

……………………

如此得到的子序列$x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)}$, ……, $x_n^{(n)}$……便是*Cauchy*序列，它必向完备空间X的某点x收敛，因此X是序列式紧的，从而也就是紧的。

〔证完〕

下边对紧度量空间引进拓扑学中非常有用的*Lebesgue*数概念。

定理5.15 设(x, ρ)是紧度量空间，而$\{G_\alpha: \alpha\in A\}$是$X$的开覆盖，则必存在一个正数$\lambda>0$（依赖于该覆盖）使得对于任意一点$x\in X$，其开球$S(x; \lambda)$整个包含于某个$G_\alpha$之中。$\lambda$叫做$X$关于此覆盖的*Lebesgue*数。

证明 用反证法。假设结论不成立，那么对于每一个自然数n都存在着开球$S(x_n; \frac{1}{n})$，它不能整个地包含在任何一个G_α之中。因为X是紧的，必有$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于空间X的某点x，取G_α，使$x\in G_\alpha$，于是就有一个开球$S(x; a)$满足

$$S(x;\ a)\subset G.$$

因x_{n_k}收敛于x，所以存在K_0，使$k\geqslant K_0$时

$$x_{n_k}\in S(x;\frac{1}{2}a).$$

取满足 $\frac{1}{n_k}<\frac{1}{2}a$和$k\geqslant K_0$的$k$，则有

$$S(x_{n_k},\ \frac{1}{n_k})\subset S(x;a)\subset G.$$

这与x_n的取法矛盾。

〔证完〕

§4 映　　射

这一节要讨论的是从度量空间X到度量空间Y的连续映射，首先看一个特殊情形，X是紧度量空间，Y是通常的实数空间，只须注意到紧空间的连续象是紧的，而实数空间的紧子集是有界闭集，明显可得

定理5.16 设f是从紧度量空间X到实数空间R的连续映射，则f在X上必能取到最大(最小)值。

下边给出度量空间上映射的一致连续概念。

定义 7 设$(X,\ \rho_1)$，$(Y,\ \rho_2)$是度量空间，$f: X\to Y$是映射，所谓f是一致连续的，是指：对每一个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对X中任意点x_1，x_2，若$\rho_1(x_1,\ x_2)<\delta$，则有$\rho_2(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$。

定理5.17 设$(X,\ \rho_1)$是紧度量空间，$(Y,\ \rho_2)$是度量空间，又$f: X\to Y$是连续映射，那么f必是一致连续的。

证明 用反证法。设定理结论不成立，于是存在$\varepsilon_0>0$，

使对每个自然数n，都存在点$x_n^{(1)}$、$x_n^{(2)}$，满足$\rho_1(x_n^{(1)},$
$x_n^{(2)})<\frac{1}{n}$，而

$$\rho_2(f(x_n^{(1)}),\ f(x_n^{(2)}))\geqslant\varepsilon。$$

因X是紧的，故存在$x_0\in X$及子序列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$收敛于x_0，$\longrightarrow x_0$。又因为$\rho_1(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)})<\frac{1}{n}$，因此必有$\{x_{n_k}^{(2)}\}$收敛于$x_0$。令$y_0=f(x_0)$。因$f$是连续的，

故$f(x_{n_k}^{(1)})$收敛于y_0，$f(x_{n_k}^{(2)})$收敛于y_0。

这样就存在K_0，当$k\geqslant K_0$时

$$\rho_2(f(x_{n_k}^{(1)}),\ f(x_{n_k}^{(2)}))<\varepsilon。$$

这是矛盾，从而定理成立。

〔证完〕

其次，我们研究一个映射的扩张问题。

定理5.18 设$(X,\ \rho_1)$是度量空间，$(Y,\ \rho_2)$是完备度量空间，若映射$f\ A:\rightarrow Y$是一致连续的，其中A是$(X,\ \rho_1)$某个稠密子空间，则存在一致连续映射$\tilde{f}:X\rightarrow Y$满足条件$\tilde{f}$的$=f$

证明 设$x_0\in X$，因为A在X中稠密，所以存在A中的点列$\{a_n\}$以x_0为极限。$\{a_n\}$是Cauchy列，由f的一致连续性保证了$\{f(a_n)\}$是Y中的Cauchy列。而Y是完备的，故$\{f(a_n)\}$收敛于Y中唯一的一点，设为y_0。

我们定义$\tilde{f}(x_0)=y_0$。要说明定义是合理的，只须指出：若$\{a_n'\}$也是A中的点列，以x_0为极限，则$\{f(a_n')\}$也收敛

于y_0。实际上，我们由$\{a_n\}$与$\{a'_n\}$可构造一个新的点列

$$a_1,\ \cdots a'_1,\ \cdots,\ a_n,\ a'_n,\ \cdots\cdots$$

它也收敛于x_0，也是Cauchy列，由此推得序列

$$f(a_1),\ f(a'_1),\cdots,\ f(a_n),\ f(a'_n),\ \cdots\cdots$$

是Y中的Cauchy列，由于此时y_0是序列的聚点，从而必是序列的极限，故y_0是$\{f(a'_n)\}$的极限。

如上定义的$\tilde{f}: X\to Y$显然满足条件$\tilde{f}|_A=f$，为了证明$\tilde{f}$的一致连续性，只须注意一个重要的事实：

若ε，δ是任意给定的两个正数，那么关于点$x_0\in X$，总有A中的点a，使得

$$\delta_1(x_0,\ a)<\delta \quad 和 \quad \delta_2(\tilde{f}(x_0),\ (a)<\varepsilon$$

同时成立。

利用这一事实，推证$\tilde{f}: X\to Y$一致连续，虽然比较繁琐，但并不困难。事实上，设是任意给定的，由于$f: A\to Y$一致连续，所以存在$\delta_1>0$：合于条件：

对A中任意二点a_1，a_2，若$\rho_1(a_1,\ a_2)<\delta_1$，则$\rho_2(f(a_1),$ $f(a_2))<\frac{\varepsilon}{4}$，令$\delta=\frac{\delta_1}{4}$，那么当$x_1$，$x_2\in X$且$\rho_1(x_1,\ x_2)<\delta$时，我们可以先取$A$中的点$a_1$与$a_2$使得

$$\rho_1(x_1,\ a_1<\delta 和 \rho_2(\tilde{f}(x_1),\ f(a_1))<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\rho_1(x_2,\ a_2)<\delta 和 \rho_2(\tilde{f}(x_2),\ f(a_2))<\frac{\varepsilon}{4}$$

同时成立。于是 $\rho_1(a_1,\ a_2)\leqslant\rho_1(a_1,\ x_1)+\rho_1(x_1,\ x_2)+(x_2 a_2)<4\delta=\delta_1$

所以 $\rho_2(f(a_1), f(a_2))<\frac{\varepsilon}{4}$.

推出 $\rho_2(\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2))\leqslant\rho_2(\tilde{f}(x_1), f(a_1))+\rho_2(f(a)_1$ $f(a_2))+\rho_2(f(a_2, \tilde{f}(x_2))<\varepsilon$说明$\tilde{f}$是一致连续的。

〔证完〕

最后，讨论映射序列的一致收敛问题。

定义8 设 (X, ρ_1)，(Y, ρ_2)都是度量空间，f以及f_n（n是自然数）都是X到Y的映射，我们说映射序列$f_1, f_2, \cdots, f_n$，……一致收敛于f，是指对每一个$\varepsilon>0$，都存在N，使$n\geqslant N$时，

$\rho_2(f_n(x), f(x))<\varepsilon$对一切$x\in X$都成立。

下面的定理是数学分析中相应定理的推广。

定理5.19 符号意义同上，如果每个f_n都是连续映射，而且$\{f_n\}$一致收敛于f，那么f也是连续的。

证明与数学分析中相应定理的证明是类似的，留给读者作为练习。

§5 度量化问题

拓扑空间叫做可距离化的(*metrizable*)或可度量化的，是指它的拓扑结构能由某一度量诱导出来。这里再强调一下，度量空间的自然拓扑是被度量唯一确定了的，但是一个可度量化的拓扑空间却可由不同的度量诱导出它的拓扑。

本节将讨论拓扑空间可以度量化的内在条件问题，这就是度量化(*metrization*)问题的内容。度量化问题是拓扑空间理论的中心和灵魂。从拓扑空间理论创立至今，几十年来，一直吸引

着许多卓越的拓扑学家在这一课题中工作着，直到1950～1951年才算得到了解决。苏联的U·Smirnov与日本的*J*. *Nagata*两位青年数学家独立得到了著名的*Naeata*－*Smirnov* 度量化定理同时，美国的*R*. *H*. *Bing*也得到了*Bing*定理，这些定理都是在前人成就基础上自然地得到的，首先法国*J*. *Dieudonne*充分注意到分析及拓扑的局部性质，从而提出了更为细致的仿紧（*Paracompact*）概念（1944），接着美国*A*. *H*. *stone*于1948年证明了度量空间是仿紧的，这些工作与Urysohn的思想结合起来使得度量化问题的解决成为非常自然的了。50年代之后，人们对度量化问题的研究仍在热烈进行着，又得到了许多度量化定理，成果是非常丰富的。顺便提一下，*Stone*的工作还为现代维度论的研究开辟了新道路，人们首先是在可分度量空间的维度论方面取得了系统的结果，直到50年代才将这些结果推广到一般的度量空间中去，从而取得突破性的进展，这是捷克的 *Katetov* 与日本的 *Morita* 各自独立完成的工作。从此现代维度论便应运而生，*Stone*的定理对于现代维度论的建立起着关键的作用。*Naeata*在《现代维度论》一书中指出“*A*. *H*. *Stone*定理不仅对现代维度论，而且对整个拓扑空间理论的新发展都具有划时代的意义，”这种说法并不过分。

首先提出一个很有用的定理。

定理5.20 设（X, $\mathscr{T}$）是拓扑空间，如果存在合于下列条件的可数个伪度量$p=\{\varrho_n: 1, 2, \cdots\}$

（1）当x_0固定时，每一个$\varrho_n(x_0, x)$都是定义在X上、取值在R中的连续映射

（2）若二点x, y，使得每个ϱ_n都有$\varrho_n(x, y)=0$，则$x=y$；

(3) 设$x_0\in X$，U是包含x_0的开集，那么存在n及正数$\varepsilon>0$，使$S_n(x_0;\ \varepsilon)\subset U$，其中$S_n(x_0;\ \varepsilon)=\{x\in X: \rho_n(x_0,\ x)<\varepsilon\}$。

那么空间（X，$\mathscr{T}$）就是可度量化的。

证明 首先，对每个ρ_n定义开球（叫ρ_n一开球）族$\{S_n(x_0;\ a): x_0\in X,\ a>0\}$，由它作基底生成拓扑$\mathscr{T}_n$，那么，因为$\rho_n$是连续函数，所以

$S_n(x_0;a)=\{x: \rho_n(x_0,x)<a\}\in\mathscr{T}$

因此$\mathscr{T}_n\subset\mathscr{T}$。

其次，若取所有ρ_n一开球族

$\mathscr{S}^*=\{S_n(x_0;a): x_0\in X,\ a>0,\ n\text{是自然数}\}$。

作子基生成拓扑$\mathscr{T}^*$，那么据上段所述，可知$\mathscr{T}^*\subset\mathscr{T}$。我们来证明相反的关系$\mathscr{S}\subset\mathscr{S}^*$，为此只须证明当$x\in X$，而$U$是$x$的开邻域时，存在开球$S_n(x_0;\ a)$合于：$x\in S_n(x_0;\ a)\subset U$。根据条件（3）这是成立的。

不妨设$\sup\{\rho_n(x,\ y): x,\ y\in X\}\leqslant 1$（$n$是自然数），我们要证明如下的二元函数$\rho$

$$\rho(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho_n(x,\ y)$$

是X上的度量（这是显然的），而且使得度量空间（X，ρ)的拓扑结构$\mathscr{T}'$就是$\mathscr{T}^*$（$\mathscr{T}$=），就是定理的证明也就完成了。下边给出证明。

i) 设$S(x_0;a)$是一ρ一开球，则存在$B\in\mathscr{B}^*$，使得$x_0\in B\subset S(x_0;a)$。其中$\mathscr{B}^*$是$\mathscr{T}^*$决定的基底。

这是因为定义$\rho(x,y)$的级数是一致收敛级数，因此存在n_0使得合于条件

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho_n(x_0, x)<\frac{1}{2}a$$

其次，取$B\in\mathscr{B}^*$为

$$B=\bigcap_{n=1} S_n(x_0;\frac{a}{2n_0})$$

于是$x_0\in B$，而且对B中任意一点x都有

$$\rho_n(x_0, x)<\frac{a}{2n_0} \qquad (n\leqslant n_0)$$

因此就有

$$\rho(x_0, x)=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\rho_n(x_0, x)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho_n(x_0, x)$$

$$<n_0\frac{a}{2n_0}+\frac{1}{2}a=a$$

这说明$x\in S(x_0;a)$。故$x_0\in B\subset S(x_0; a)$。

ii) 设有ρ_n—开球$S_n(x_0;a)$，则存在ρ—开球$S(x_0;\varepsilon)$合于：

$$x_0\in S(x_0;\varepsilon)\subset S_n(x_0;a)。$$

实际上，注意到$\rho(x, y)\geqslant\frac{1}{2^n}\rho_n(x, y)$，故当取$\varepsilon=\frac{1}{2^n}a$时，便有

$$x_0\in S(x_0;\varepsilon)\subset S_n(x_0;a)$$

iii) 设$U\in\mathscr{T}^*$，那么对每一个$x_0\in U$，由ii) 可知存在$B\in\mathscr{B}^*$，使得$x_0\in B\subset U$，并且又存在ρ—开球$S(x_0;a)\subset B$，这就证明了$U\in\mathscr{T}'$从而$\mathscr{T}^*\subset\mathscr{T}'$，此外由i) 可知$\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}^*$故$\mathscr{T}'=\mathscr{T}^*=\mathscr{T}$。 〔证完〕

若一个空间的拓扑结构不是用可数个伪度量导出，而是由基数为m的一族伪度量导出时，称做m—几乎度量空间。

定义 9 设X是一个集合，$P=\{\varrho_a: a\in A\}$是一族由$X\times X$到R中的函数，即$\varrho_a: X\times X\to R$，而且满足下列条件：

（1）对任意的$x\in X$，对任意的$a\in A$，$\varrho_a(x, x)=0$；

（2）对任意的$x,y\in X$，对任意的$a\in A$，$\varrho_a(x,y)=\varrho_a(y, x)\geqslant 0$；

（3）对任意的$x, y, z\in X$，对任意的$a\in A$，

$\varrho_a(x, z)\leqslant \varrho_a(x, y)+\varrho_a(y, z)$；

（4）若x,y满足：对每一个$a\in A$，$\varrho_a(x,y)=0$，则$x=y$；

（5）若$a_1, a_2, \cdots, a_n\in A$，

$\varrho(x, y)=max\{\varrho_{a_1}(x, y), \varrho_{a_2}(x, y), \cdots, \rho_{a_n}(x, y)\}$，则$\varrho\in p$。

设$|A|=m$（此处m可以是有限，也可以是无限基数），则(X, P)，叫做m—几乎度量空间（*m-almost metric space*）。

对于m—几乎度量空间，可以定义一系列开球，将它们作为子基诱导出X上的一个拓扑。在这个拓扑空间中，子集合M的闭包满足条件

$$\overline{M}=\bigcap_{a\in A}\{x: \varrho_a(x, M)=0\}.$$

由条件（1）（2）（3）可知$\varrho_a(x_0, x)$是以$x\in X$为自变量的连续函数。又设F是任意闭集，于是当$x_0\overline{\in} F$时，便存在$\varrho_a\in P$，使得

$\varrho_a(x_0, F)>0$

这样就证明了X是$T_{3\frac{1}{2}}$空间（根据（4），X自然是*Hausdorff*空间）。由此归结出

定理5.21 m—几乎度量空间是$T_{3\frac{1}{2}}$空间。

下面进一步证明其逆定理。

定理5.22 每个$T_{3\frac{1}{2}}$空间都是（对于某个基数m）可以m

一几乎度量化的拓扑空间。

证明 设 $(X, \mathscr{T})$ 是 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间，$\{f_a: a\} \in A$ 表示定义在 X 上、取值于 $[0,1]$ 的一切联系函数 $f_a: X \to [0,1]$ 的集，定义 $\rho_a: X \times X \leftarrow R$ 如下

$$\rho_a(X, y) = |f_a(X) - f_a(y)|$$

容易证明 $P = \{\rho_a: a \in A\}$ 使得 (X, P) 成为 m— 几乎度量空间（其中 $|A| = m$）。例如条件（4）可以这样证明、当 $x \neq y$，时，由于 X 是 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间，便存在连续函数 $f_a: X \to [0,1]$ 合于条件 $f_a(x) = 0$，$f_a(y) = 1$，因此，$\rho_a(x, y) = 1$。

设 m—几乎度量空间 (X, P) 的拓扑是 $\mathscr{T}^*$，以下证明 $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}$。

i）设 $U \in \mathscr{T}$，$x_0 \in U$，由于 X 是 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间，因此存在连续函数 $f_0: X \to [0, 1]$，使之合于条件

$$f_a(x_0) = 0, \text{ 而 } x \overline{\in} U \text{ 时，} f_a(x) = 1$$

那么，由伪度量 ρ_0 决定的开球 $S_a(x_0, 1) \subset U$，由此即能推出 $U \in \mathscr{T}^*$，故 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$。

ii）因为每个 ρ_a 均由连续函数 f_a 按以下公式构造出来

$$\rho_a(x, y) = |f_a(x) - f_a(y)|$$

故集合 $S_a(x_0; \varepsilon)$ 为

$$S_a(x_0; \varepsilon) = \{x: \rho_a(x_0, x) < \varepsilon\} =$$

$$= \{x: |f_a(x) - f_a(x_0)| < \varepsilon\}$$

即是 $\mathscr{T}$ 中元素，这样又证明了 $\mathscr{T}^* \subset \mathscr{T}$。

〔证完〕

过去我们曾指出过，有例子说明 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间不必是正规空间，因此与度量空间不同的 m—几乎度量空间未必是正规空间（度量空间必是正规空间），但应注意在拓扑意义下 $\aleph_0$—几乎度量空间与度量空间相同。

下边从Urysohn定理开始介绍度量化定理。

定理5.23 若X是T_1正则的且满足第二可数公理的拓扑空间，则X便是可以度量化的。

证明 前面曾证明了满足第二可数公理的正则空间一定是正规空间。

由第二可数公理，设B_1，B_2，…，B_n，…组成可数基底，我们构造一个足够强的连续函数族如下，（B_i，B_j）称做一个标准对，是指$\overline{B}_i\subset B_j$，根据Urysohn引理对每一标准对都可以取一连续函数$f: X\to[0, 1]$，当$x\in \overline{B}_i$时，$f(x)=0$，当$x\in B_j$时，$f(x)=1$。这样取的连续函数充其量形成可数集$\mathscr{F}$。

下面证明利用$\mathscr{F}$中元素可以"函数分离"任意点x与不包含x的闭集。实际上，设F是闭集，$x_0\overline{\in}F$，于是存在B_j，使$x_0\in B_j\subset X-F$，再由T_3性，存在B_i，使$x_0\in B_i\subset B_j$，于是(B_i，B_j)是标准对，那么由它所决定的$f: X\to[0, 1]$即满足将x_0与F"函数分离"的条件。这样一来，当$\mathscr{F}=\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\cdots\}$时，则伪度量

$$\rho_n(x, y)=|f_n(x)-f_n(y)| \qquad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

便满足定理5.20的条件，从而X是可度量化的。

〔证完〕

度量空间未必满足第二可数公理，我们只要取X是任意非可数集，并于X上引入散拓扑，而散拓扑空间可以度量化，只要取ρ如下：

$$\rho(x, y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

就行了。显然（X，ρ）不满足第二可数公理。

然而从我们对度量空间的讨论便能得到下面的Urysohn

第二度量化定理。

定理5.24 紧空间X可以度量化的充要条件是X是T_1正则的且满足第二可数公理的拓扑空间。

寻找使拓扑空间可度量化的充要条件，而且又能将Urysohn定理作为一个自然的推论，这是几十年来引人入胜的“度量化”问题。

我们从仿紧概念开始讨论这个问题。

定义10 T_2空间X称作仿紧的（*paracompact*）是指X的任意开覆盖都存在局部有限（*locallyfinite*）的开加细(*open-refinement*）覆盖。

对定义中的几个术语解释如下：

集族$\mathscr{A}$是局部有限的：对每一点$x\in X$，存在x的一个邻域U，使得U仅与$\mathscr{A}$中有限个集相交，即$\{A: A\in\mathscr{A}, A\cap U\neq\phi\}$是有限族。

集族$\mathscr{A}$是局部散的(*locally discrete*)：对每一点$x\in X$，存在的一个邻域U，使得U至多与$\mathscr{A}$中一个集相交，即

$$\{A: A\in\mathscr{A}, A\cap \mathscr{U}\neq\phi\}\leqslant 1$$

集族$\mathscr{A}$是σ—局部有限(散）的：$\mathscr{A}$可以表示为$\mathscr{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n$，其中每个$\mathscr{A}_n$都是局部有限（散）的。

集族$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的加细：对每一个$A\in\mathscr{A}$，存在$B\in\mathscr{B}$，使得$B\subset A$。

局部有限性是非常重要的性质，例如我们知道，A_1、A_2是拓扑空间X中的两个集合，那么

$$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2$$

成立。还可以将上式中集合个数扩充为任意有限个，但是不能扩充至无限个。例如R中全体有理数是一可数集$\{r_1, r_2,$

$\cdots, r_n, \cdots\cdots\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$，在通常拓扑意义下有下列不等关系：

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}} = R \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\{r_n\}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$$

若$\mathscr{G}$是局部有限的集族（不论其基数有多大！），则有以下性质：

定理5.25 设$\mathscr{A}$是拓扑空间$(X, \mathscr{T})$中的局部有限集族，则

$$\overline{\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}} = \bigcup\{\bar{A} : A \in \mathscr{A}\}$$

证明 首先，以下包含关系显然成立

$$\bigcup\{\bar{A} : A \in \mathscr{A}\} \subset \overline{\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}}$$

我们证明相反的包含关系。设$x \in \overline{\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}}$，那么因为$\mathscr{A}$是局部有限的，故存在$x$的邻域$U$，使$U$仅与$\mathscr{A}$中有限个元素$A_1, A_2, \cdots, A_n$相交，于是 $x \in \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$，从而必存在$A_k$，使$x \in \bar{A}_k$，所以$x \in \bigcup\{\bar{A} : A \in \mathscr{A}\}$，即有

$$\overline{\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}} \subset \bigcup\{\bar{A} : A \in \mathscr{A}\}$$

〔证完〕

再看一个对以后有用的性质：

定理5.26 设$\mathscr{A}$是拓扑空间$(X, \mathscr{T})$中的局部有限集族，对每个$A \in \mathscr{A}$都存在连续函数$f_A : X \to R$，当$x \notin A$时，$f(x) = 0$，那么函数

$$f(x) = \sum_{A \in \mathscr{A}} f_A(x)$$

是有意义的，而且$f: X \to R$是连续函数。

证明 设$x \in X$，由于$\mathscr{A}$是局部有限的，故存在x的一个邻域U，使得U仅与$\mathscr{A}$中有限个元素$A_1, \cdots, A_n$相交，因此当$y \in U$时

$$f(y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(y)$$

于是$f(x)$是有意义的，而且任意网$\{S_n, n \in D\} \to x$时，有$\{f(S_n), n \in D\} \to f(x)$。因此$f$是连续函数。

〔证完〕

现在让我们来介绍A. H. Stone的一些结果，下边定理的证明方法以"Stone's trick"而举世闻名。

定理5.27 可(伪)度量化的拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的任意开覆盖存在ϱ—局部散的开加细覆盖。

证明 任取一个诱导出拓扑$\mathscr{T}$的度量ϱ，设$\mathscr{U}$是X的一个开覆盖，首先将$\mathscr{U}$良序化，即$\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_\mu\}$。对每一个$U_\alpha$，令

$$U_\alpha(n) = \{x : \varrho(x, X - U_\alpha) > 2^{-n}\}$$

$$U_\alpha^*(n) = U_\alpha(n) - \bigcup\{U_\beta(n+1) : \beta < \alpha\}$$

于是有以下结论：

i) 每个$U_\alpha(n)$都是开集，而且$U(n) \subset U_\alpha(n+1)$，$U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_\alpha(n)$。 (读者自证)

ii) $\alpha \neq \beta$时，$\varrho(U_\alpha^*(n), U_\beta^*(n)) \geqslant 2^{-(n+1)}$

实际上，若$\beta > \alpha$，并设$x \in U_\alpha^*(n)$，$y \in U_\beta^*(n)$则从$\varrho(x, X - U_\alpha) > 2^{-n}$，$\varrho(y, X - U_\alpha) \leqslant 2^{-(n+1)}$，及三角形不等式推出 $\varrho(x, y) \geqslant |\varrho(x, X - U_\alpha) - \varrho(y, X - U_\alpha)| = 2^{-(n+1)}$ 于

是ii）成立。

iii）$X=\bigcup\{U_\alpha^*(n):n$是自然数，$\alpha<\omega_\mu\}$

实际上，任取$x_0\in X$，存在$\alpha_0<\omega_\mu$，使$x_0\in U_{\alpha_0}$，而且α_0是满足此关系的最小序数，因为U_α是开集，故$X-U_{\alpha_0}$是闭集，而$x_0\in X-U_{\alpha_0}$，因此当n充分大时可使$x\in U_{\alpha_0}(n)$。再由$U_\alpha(n)\subset U_\alpha$，及$U_\alpha^*(n)$的定义知$x_0\in U_{\alpha_0}^*(n)$，这就证明了iii）

iv）由ii）知，对同一个自然数n，$\alpha\neq\beta$时，$U_\alpha^*(n)$，与$U_\beta^*(n)$之间保持着（不随α，β变化）超过某一个正数$2^{-(n+1)}$的距离，再将每一个个$U_\alpha^*(n\varrho)$加宽，即设$\widetilde{U}_\alpha(n)=\{x:\varrho(x,U_\alpha^*(n))<2^{-(n+3)}$时，则$\widetilde{U}_\alpha(n)$便是开集。

v）对同一个n，当$\alpha\neq\beta$时，$\widetilde{U}_\beta(n)$与$\widetilde{U}_\alpha(n)$之间的距离$\geqslant 2^{-(n+2)}$。（读者自证）

这样，由iv）v）可知，对每一自然数n，$\{\widetilde{U}_\alpha(n):\alpha<\omega_\mu\}$都是局部散的开集族，由iii）知它们的总体是$X$的一个开覆盖，且$\widetilde{U}_\alpha(n)\subset U_\alpha$。从而集族

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\widetilde{U}_\alpha(n):\alpha<\omega_\mu\}$$

便是$\mathscr{U}$的一个σ—局部散（有限）的开加细。

〔证完〕

定理5.28（*A. H. Stone*）可度量化的拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）必是仿紧的。

证明 设ϱ是于X上诱导出拓扑$\mathscr{T}$的任意一个度量，设$\mathscr{U}$是X的任意开覆盖。由前定理可知存在一个σ—局部散的加细开覆盖

$$\mathscr{G}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{G}_n \qquad （其中\mathscr{G}_n是局部散的）$$

不妨设$\mathscr{G}_n$中元素记作$U_{n,\alpha}$，其中α属于某一指标集A_n。定义开集

$$U_{n,\alpha}(m) = \{ x : \rho(x, X - U_{n,\alpha}) > 2^{-m} \}$$

于是$U_{n,\alpha}(m)$满足条件

$$U_{n,\alpha}(m) \subset \overline{U_{n,\alpha}(m)} \subset U_{n,\alpha}(m+1)$$

及$U_{n,\alpha}(m) \subset U_{n,\alpha}$

且 $U_{n,\alpha} = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{n,\alpha}(m)$

我们现在对每个自然数n以及$\mathscr{G}_n$中每一个元素$U_{n,\alpha}$作如下改造：

$$\widetilde{U}_{n,\alpha} = U_{n,\alpha} - \bigcup \{ U_{m,\beta}(n) : \beta \in A_m, \ m < n \}$$

于是下列结果成立：

i) $X = \bigcup \{ \widetilde{U}_{n,\alpha} : n$是自然数，$\alpha \in A_n \}$

这是因为当$x \in X$且设$\mathscr{G}$中包含x而具有最小标号n的集是$U_{n_0,\alpha}$时，显然$x \in \widetilde{U}_{n_0,\alpha}$，故i）成立。

ii) $\widetilde{U}_{n,\alpha}$是开集。

实际上，由于$\mathscr{G}_m$是局部散的，因此

$\bigcup \{ U_{m,\beta}(n) : \beta \in A_m \}$

是闭集，而$n-1$个闭集之并仍是闭的，从而$\widetilde{U}_{n,\alpha}$是开集。

iii) $\{ \widetilde{U}_{n,\alpha} : \alpha \in A_n, n = 1, 2, \cdots\cdots \}$是$\mathscr{G}$的加细。这是显然的。

iv) $\{ \widetilde{U}_{n,\alpha} : \alpha \in A_n, \ n = 1, 2, \cdots\cdots \}$是局部有限的。

设x是X中任意一点，在$\mathscr{G}'$中取包含x且具有最小标的集，设为$U_{n_0,\beta}$，于是存在自然数m_0，使$x\in U_{n_0,\beta}(m_0)$根据$\widetilde{U}_{n,\alpha}$的构造方法便知当$n>max\{n_0, m_0\}$时，有

$\widetilde{U}_{n,\alpha})\cap U_{n_0,\beta}(m_0)=\varnothing$

由于$\mathscr{G}_n$是局部散的集族便知有x的一个邻域U，使U与$\{\widetilde{U}_{n,\alpha}: \alpha\in A_n, n=1, 2, \cdots\cdots\}$的有限个($\leqslant max\{n_0, m_0\}$)个集相交。

〔证完〕

设X是拓扑空间，我们再引入一个术语如下：

$\mathscr{B}$是σ—局部有限基（σ—散基）：$\mathscr{B}$是X的基底，而且$\mathscr{B}$可表示为

$$\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$$

其中每一个$\mathscr{B}_n$是局部有限（局部散）的。

显然，可数基一定是σ—散基。

定理5.29 设正则拓扑空间$(X, \mathscr{T})$具有σ—局部有限基，则X必是正规的。

证明 设$\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$是$X$的拓扑基，其中每个$\mathscr{B}_n$都是局部有限的，$F_1, F_2$是任意两个不相交的闭集。下面证明$F_1$、$F_2$可用开集分离。实际上，对$F_1$的每个点$x$存在$B(x)\in\mathscr{B}$，使得

$\overline{B(x)}\cap F_2=\varnothing$

同理，对F_2的每个点y，存在$B(y)\in\mathscr{B}$，使得

$\overline{B(y)}\cap F_1=\varnothing$

令 $U_n = \bigcup \{ B(x) : x \in F_1,\ B(x) \in \mathscr{B}_n \}$

$V_n = \bigcup \{ B(y) : y \in F_2,\ B(y) \in \mathscr{B}_n \}$

由于$\mathscr{B}_n$是局部有限的集族，故

$$\overline{U_n} = \bigcup \{ \overline{B(x)} : x \in F_1,\ B(x) \in \mathscr{B}_n \}$$

$$\overline{V_n} = \bigcup \{ \overline{B(y)} : y \in F_2, B(y) \in \mathscr{B}_n \}$$

且 $\overline{U_n} \cap F_2 = \phi$

$\overline{V_n} \cap F_1 = \phi$

令

$$\widetilde{U}_n = U_n - \bigcup_{m=1}^{n}$$

$$\widetilde{V}_n = V_n - \bigcup_{m=1}^{n} \overline{U_m}$$

那么$\widetilde{U}_n$及$\widetilde{V}_n$是开集，并且对任意自然数m，n，恒有

$$\widetilde{U}_m \cap \widetilde{V}_n = \phi$$

而且 $F_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$ $F_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{V}_n$

从而 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{U}_n$与$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{U}_n$便是分离$F_1$、$F_2$的开集。

〔证完〕

定理5.30 （*Nagata－Smirnov*）拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）可度量化当且仅且它是T_3的且存在σ—局部有限基底。

证明 先证条件的必要性。

设（X，$\mathscr{T}$）是可度量化的拓扑空间，ρ是导出拓扑$\mathscr{T}$的一个度量，此时X必是T_4空间，因为集族$\{ S(x; \frac{1}{n} : x \in X \}$

（对每个n）是X的开覆盖，于是便存在着σ一局部有限的加细开覆盖$\mathscr{G}_n$，注意$\mathscr{G}_n$中每个集合B的直径$(\delta B)\leqslant\frac{2}{n}$。

因为$\mathscr{G}_n$是σ一局部有限的，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{G}_n$也是$\sigma$一局部有限的，这样只须证明它是基底，以下来证明$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{G}_n$是$X$的基底。

设U是X的任意一个开集，于是对于每一点$x\in X$，必存在n，使开球$S(x; \frac{4}{n})\subset U$。因为$\mathscr{G}_n$是开覆盖，所以存在$B\in\mathscr{G}_n$，使$x\in B$。又因为$\delta(B)\leqslant\frac{2}{n}$，从而对于$B$中的每一点$y$恒有$\rho(x, y)\leqslant\frac{2}{n}$，

故 $$x\in B\subset S(x; \frac{4}{n})\subset U。$$

这样就证明了$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{G}_n$是基底。

其次证明充分性。

设$\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$是拓扑空间$X$的基底，其中$\mathscr{B}_n$是局部有限的开集族。因为空间是$T_3$的，由定理5.29可知空间是$T_4$的。这样一来Urysohn定理的条件就得到满足。于是，当$F\subset U$，F是闭集，U是开集时，便存在连续函数$f: X\to[0, 1]$，使得$x\in F$时，$f(x)=1$，当$x\overline{\in}U$时，$f(x)=0$。

现在任意固定一对自然数m，n，并设U是$\mathscr{B}_n$中任意一个

元素，我们考虑$\mathscr{B}_m$中一切满足$V\subset U$的集V，设$F(U, m)=\bigcup\{\bar{V}: V\in\mathscr{B}_m, \bar{V}\subset U\}$。因为$\mathscr{B}_m$是局部有限的，$F(V, m)$便是闭集。而且$F(U, m)\subset U$，因此存在一个连续函数$f_{(U, m)}: X\to[0,1]$使得当$x\in F(U,m)$时，$f_{(U, m)}(x)=1$，当$x\bar{\in}U$时$f_{(U, m)}(x)=0$。又由于$\mathscr{B}_n$是局部有限的，可知以下伪度量是有意义的

$$\rho_{m,n}(x, y)=\sum_{U\in\mathscr{B}_n}|f_{(U,m)}(x)-f_{(U, m)}(y)|$$

而且当x固定时，$\rho_{m, n}(x, y)$还是关于自变量$y\in X$的连续函数。

由于X是T_4的，所以定理5.20的ii）可由iii）推出，我们只须验证定理5.20的iii）。设$x_0\in X$，G是x_0的开邻域，于是存在U及$V\in\mathscr{B}$使到$x_0\in V\subset\bar{V}\subset U\subset G$，不妨设$U\in\mathscr{B}_n$、$V\in\mathscr{B}_m$，那么上面定义的$f_{(U, m)}$就合于条件：

$f_{(U, m)}(x_0)=1$，而当$x\bar{\in}U$时，$f_{(U, m)}(x)=0$

于是$\rho_{m,n}(x_0, X-G)\geqslant 1$，即由$\rho_{m,n}$决定的开球$S_{m,n}(x_0; 1)\subset G$。这样就得到定理5.20的iii）。说明$X$是可度量化的。

〔证完〕

因为前面还证明了度量空间具有σ一散基，那么利用同样的方法就可以得到R. H. $Bing$的结果。

定理5.31（$Bing$）拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）是可以度量化的当且仅当它是T_3的而且具有σ一散基。

若将上述$Nagata-Smirnov$定理以及$Bing$定理中的“可度量化”改为“可伪度量化”，与此相应地把“T_3”换作“正则”，则所得定理也是成立的。

由定理5.20可知，以下关于乘积空间的定理是成立的：

定理5.32 设乘积空间$X=\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n$，若每一个$X_n$是可度量化的，那么$X$也是可度量化的。

证明 设X_n的拓扑由度量ρ_n导出，对任意的$x, y\in X$

令$\rho_n^*(x, y)=\rho_n(P_n(x), P_n(y))$，其中$P_n$表示$X$向$X_n$的投影。

由所有形如

$\rho^*(x,y)=max\{\rho_{n_1}^*(x, y), \cdots, \rho_{n_k}^*(x, y)\}$

的ρ^*组成可数族P。不难验证每一个ρ^*都是X上的伪度量，且满足定理5.20的条件，从而X是可度量化的。

〔证完〕

由此定理可知，空间$I^{\aleph_0}$是可度量化的，又因为$I^{\aleph_0}$有可数稠密子集$\{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, \cdots\cdots): r_i$是$I$中有理数，$n$是自然数$\}$。所以$I^{\aleph_0}$是可分的并且$I^{\aleph_0}$的每一个子空间也是可分度量空间。实际上，可分度量空间必满足第二可数公理，而子空间也满足第二可数公理，所以子空间是可分的。

理定5.33 拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的拓扑$\mathscr{T}$能由某一可分度量（即做为度量空间是可分的）导出，当且仅当X与$I^{\aleph_0}$中某子空间同胚。

请读者自己证明。

最后再提出一个关于一般乘积空间的可度量化的条件

定理5.34 设乘积空间$X=\mathop{\times}\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$，则$X$可度量化的充要条件是每一个$X_\alpha$都可度量化，而且除了可数多个因子外，其它的$X_\alpha$是都单点集。

证明 首先注意到若有不可数个X_a是非单点集的话，那么X便不满足第一可数公理，从而X不可度量化。

其次，对于每一个$a\in A$，我们不难构造一个X_a^*，它是X的子空间，并与X_a同胚，从而当X可度量化时，就可推出X_a^*，进而推出X_a可度量化。

至于充分性，则可看做定理5.32的直接推论。

〔证完〕

第五章 习 题

1．设(X,ρ)是一个伪度量空间，在X上定义二元关系如下：

$$xEy \text{当且仅当} \rho(x,y)=0,$$

试证：(1) E是X上的等价关系；

(2) 对任意的$\tilde{x},\tilde{y}\in X/E$，令

$$\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})=\inf\{\rho(x,y): x\in\tilde{x},\ y\in\tilde{y}\}$$

则$(X/E,\tilde{\rho})$是度量空间；

(3) $\tilde{\rho}$所决定的拓扑就是X/E上的商拓扑，并且由X到X/E上的射影P是保距的。

2．设(X,ρ)是度量空间，令

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},$$

试证：(1) (X,ρ_1)是度量空间；

(2) (X,ρ_1)与(X,ρ)有相同的拓扑；

(3) (X, ρ_1) 与(X, ρ) 有相同的Cauchy序列。

3．在实数集合X上引入度量

$$\rho_1(x, y)=|x-y|$$

$$\rho_2(x, y)=|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|。$$

试证，度量空间 (X, ρ_1) 与 (X, ρ_2) 的拓扑相同，但Cauchy序列却不同。

4．设f 是完备度量空间X 到度量空间Y 上的连续映射，试问Y一定完备吗？

5．度量空间中的单点集一定是无处稠密的吗？

6．设X是度量空间，若X有稠密子集A，并且A中每一个Cauchy列都在X中收敛，证明X是完备的。

7．设X是 $[0, 1]$ 上所有实值连续函数的集合 $C[0, 1]$，对任意的x，$y\in X$，令

$$\rho(x, y)=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|$$

证明 (X, ρ) 是完备的度量空间。

8．设$X=C[0, 1]$，对任意的x，$y\in X$，令

$$\rho(x, y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt$$

证明 (X, ρ) 不是完备的度量空间。

9．设 (X, ρ_1) 与(Y, ρ_2) 都是度量空间，$f: X\to Y$，若存在实数$\alpha<1$，使得不等式

$$\rho_2(f(x), f(x'))\leqslant\alpha\cdot\rho_1(x, x')$$

对一切x，$x'\in X$恒成立，此时我们称f是由 (X, ρ_1) 到 (Y, ρ_2) 的压缩映射。

证明：(1) 压缩映射是连续映射；

（2）（压缩映射原理）由完备度量空间到其自身的压缩映射有唯一的不动点（点$x\in X$叫作映射$f: X\to X$的不动点是指x满足方程$f(x)=x$）。

10. 证明不存在由紧度量空间到其真子集上的保距映射。

11. *Sorgenfrey*直线可否度量化？

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□ □□□ □□□□ □□□□O189.11/
8 ss□□10259098 □□□□□1985□08□□1□
□□=
□□=209
SS□=10259098
□□□□=

2 [illegible]

3 [illegible]

4 [illegible]

5 [illegible]

[illegible]

[illegible]